Prof. Fabrizio Iozzi – email: fabrizio.iozzi@uni-bocconi.it

Lezioni 1/2

Gli insiemi numerici

Gli insiemi numerici con i quali lavoreremo sono:

- $\subseteq$, l'insieme dei numeri naturali: 0, 1, 2, … infinito

- $\wedge$, l'insieme dei numeri interi relativi: 0, 1, –1, 2, –2, … infinito

- $\angle$, l'insieme delle frazioni della forma $\frac{m}{n}$ dove m e n sono elementi di $\wedge$. Le frazioni hanno tre rappresentazioni principali:
  - in forma di frazione, ad esempio $\frac{5}{7}$. In questa forma si può avere immediatamente l'idea del rapporto tra numeratore e denominatore ed è molto adatta a situazioni in cui la divisione è fissata a priori (per esempio, si sente spesso parlare di dodicesimi in questioni che sono riferite ai mesi dell'anno)
  - in forma di numero decimale, limitato o illimitato periodico, ad esempio 0,714285714285… Questa forma è particolarmente adatta al calcolo numerico
  - in forma percentuale, ad esempio 71,42%. La forma percentuale è adatta alle situazioni in cui questo dato ha un significato particolare.

  La forma percentuale e quella decimale sono legate dal fatto che la prima si ottiene dalla seconda moltiplicando per 100 (e viceversa la seconda dalla prima dividendo per 100). Nelle varie situazioni è utile saper interpretare lo stesso numero nei tre modi.

In questi insiemi sono sempre possibili somme, sottrazioni e moltiplicazioni. Per quanto riguarda la divisione, l'unica precauzione da prendere è di non dividere per 0.
ATTENZIONE: 3/0 non ha significato perché non esiste nessun numero che moltiplicato per 0 dà 3. 0/3, invece, è uguale a 0, perché l'unico numero che moltiplicato per 3 dia 0 è proprio 0. 0/0 non ha significato (il denominatore è zero). Si faccia quindi molta attenzione a non confondere le tre situazioni.

Alcune nozioni legate alle potenze sono particolarmente comode per il calcolo e ne rendono la struttura più compatta. Purtroppo, rimanendo nel campo dei numeri razionali, non è possibile dare significato a questo tipo di espressioni per tutti i valori possibili delle grandezze in gioco. Per esempio, una scrittura come $a^b = c$ ha senso se b è un numero intero, ma se è una frazione bisogna stare attenti al segno di a (la regola dei segni infatti non può essere applicata perché di un numero razionale non si può dire se esso è pari o dispari). Inoltre, anche se la scrittura ha senso, potrebbe non avere un valore. Ad esempio, $3^b = 2$ ha perfettamente senso ma non esiste nessun numero razionale che messo come esponente a 3 dia come risultato 2. Una risposta parziale viene ottenuta prendendo in considerazione un insieme più ampio di numeri, detti numeri reali.

- ∇, l'insieme dei numeri reali. Corrisponde all'insieme di tutti i numeri decimali limitati e illimitati (periodici e non).

I sottoinsiemi dell'insieme ∇ più frequentemente usati sono gli intervalli.

DEFINIZIONE: si dice *intervallo chiuso di estremi a e b* il sottoinsieme dei numeri reali *x* tali che $a \le x \le b$.

L'aggettivo chiuso deriva dal fatto che l'intervallo contiene gli estremi *a* e *b*.

DEFINIZIONE: si dice *intervallo aperto di estremi a e b* il sottoinsieme dei numeri reali *x* tali che $a < x < b$.

Gli intervalli sopra definiti sono anche *limitati*, nel senso che la loro immagine geometrica è un segmento di retta. Gli intervalli della forma $x < b$ o $a < x$ che corrispondono a semirette si dicono invece illimitati.

All'interno dei numeri reali si possono considerare alcune operazioni come l'estrazione di radice *n*-esima e il calcolo dei logaritmi in una data base. Rimangono comunque alcuni limiti:

- non si può estrarre la radice di indice pari (quadrata, quarta, sesta, ecc.) di un numero negativo (perché non esiste nessun numero che elevato ad una potenza pari dia come risultato un numero negativo)
- non si può dividere per 0
- non si può dare un significato univoco ad espressioni del tipo $a^b = c$ quando *a* ha segno negativo.

DEFINIZIONE: Il logaritmo di *c* in base *a* è quel numero che messo come esponente ad *a* dà come risultato *c*.

Ad esempio, poiché $3^4 = 81$ allora $\log_3 81 = 4$ (in altre parole, l'esponente che devo mettere a 3 per avere 81 è 4). Nel campo dei numeri reali possiamo dare significato anche ad espressioni come $\log_3 50$. Poiché $3^3 = 27$ e $3^4 = 81$, allora si può trovare un numero compreso tra 3 e 4 che messo come esponente a 3 dia 50. Questo numero esiste e il suo valore approssimato è circa 3,56087.

Nella pratica i logaritmi si usano solo in due basi:

base	*Nome*	*tasto sulla calcolatrice per il logaritmo*	*tasto sulla calcolatrice per l'esponenziale*
$e \approx 2.71828\ldots$	logaritmi naturali	ln	e^x
10	logaritmi decimali	log	10^x

Il motivo per cui il numero *e* è stato scelto come base di un sistema di logaritmi sarà spiegato più avanti nel corso.
Poiché i logaritmi non sono altro che gli esponenti di semplici relazioni, per essi valgono delle proprietà analoghe a quelle delle potenze.
PROPRIETÀ DEI LOGARITMI (indipendenti dalla base)

- $\log x + \log y = \log xy$ (la somma dei logaritmi è uguale al logaritmo del prodotto)
- $\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$ (la differenza dei logaritmi è uguale al logaritmo del quoziente)
- $\log x^n = n \log x$ (il logaritmo della potenza è uguale all'esponente moltiplicato il logaritmo della base)

Esercizi (da svolgere con la calcolatrice)

I primi due esercizi non presentano particolari difficoltà ma hanno lo scopo di abituare all'uso della calcolatrice. È quindi auspicabile che essi vengano svolti anche con numeri diversi da quelli proposti, soprattutto da chi non ha particolare dimestichezza con lo strumento.

1. Verificare con la calcolatrice che $\log 3 + \log 4 = \log 12$ (calcolare i due addendi, sommarli e verificare che il risultato coincide con il valore di log 12). Rifare i conti con i logaritmi naturali.
2. Si può dimostrare che i due sistemi di logaritmi considerati (decimale e naturale) sono proporzionali. In altre parole, se calcoliamo il logaritmo decimale di un numero, ad esempio 3, e poi ne calcoliamo il suo logaritmo naturale, i due logaritmi sono in un rapporto costante che *non* dipende dal numero di cui abbiamo calcolato il logaritmo (cioè 3 nel nostro esempio). Svolgere i calcoli con i numeri 3 e 4 e trovare il coefficiente di proporzionalità tra i due logaritmi verificando che è uguale per 3 e 4.
3. Quanto vale $\log_3 3$? Quanto vale $\log_3 \frac{1}{3}$? Quanto vale $3^{\log_3 12}$?
4. (meno facile) Spiegare perché i logaritmi in due basi diverse sono proporzionali.

Da ricordare

- Le definizioni dei principali insiemi numerici
- La definizione di logaritmo
- Le proprietà dei logaritmi
- I tasti corrispondenti al logaritmo e all'esponenziale sulla calcolatrice

Soluzioni

1. I valori da calcolare sono:
   log 3 = 0,4771212547
   log 4 = 0,6020599913
   log 12 = 1,0791812460
   e i corrispondenti logaritmi naturali:
   ln 3 = 1,0986122886
   ln 4 = 1,3862943611
   ln 12 = 2,4849066497
   Ovviamente essi verificano le proprietà illustrate
2. I rapporti $\frac{\ln 3}{\log 3}$ e $\frac{\ln 4}{\log 4}$ sono come detto uguali tra di loro. Il valore comune è 2,3025850929.
   Questo valore non è altro che ln 10.
3. $\log_3 3 = 1$ perché l'esponente che bisogna mettere a 3 per avere 3 è proprio 1
   $\log_3 \frac{1}{3} = -1$ perché $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$ per le regole degli esponenti negativi
   $3^{\log_3 12} = 12$. Riflettiamo sul significato dell'espressione $\log_3 12$: essa sta ad indicare il numero che messo come esponente a 3 dà come risultato 12. Ma allora, se mettiamo questo numero come esponente a 3 otteniamo proprio 12 (per chi lo capisce è ovvio, per gli altri sempre un po' meno …)
4. Si consideri un certo numero *a* fissato. Allora log a è quel numero che messo come esponente a 10 dà come risultato a. Chiamiamo *x* questo numero, cioè $10^x = a$. Nei logaritmi naturali la base è il numero *e*. Lo stesso numero *a* quindi avrà un diverso logaritmo che chiameremo *y*. Sarà quindi $e^y = a$. Confrontando le due uguaglianze si vede che deve essere $10^x = e^y$. Anche *e* deve avere un suo logaritmo naturale, cioè deve esistere un numero *z* per cui $e^z = 10$. Allora $10^x = (e^z)^x = e^{zx} = e^y$ e quindi $xz = y$ cioè il logaritmo naturale (*y*) è uguale al corrispondente logaritmo decimale (*x*) moltiplicato per *z*, che è il logaritmo naturale di 10.

Lezioni 3-4/7-8

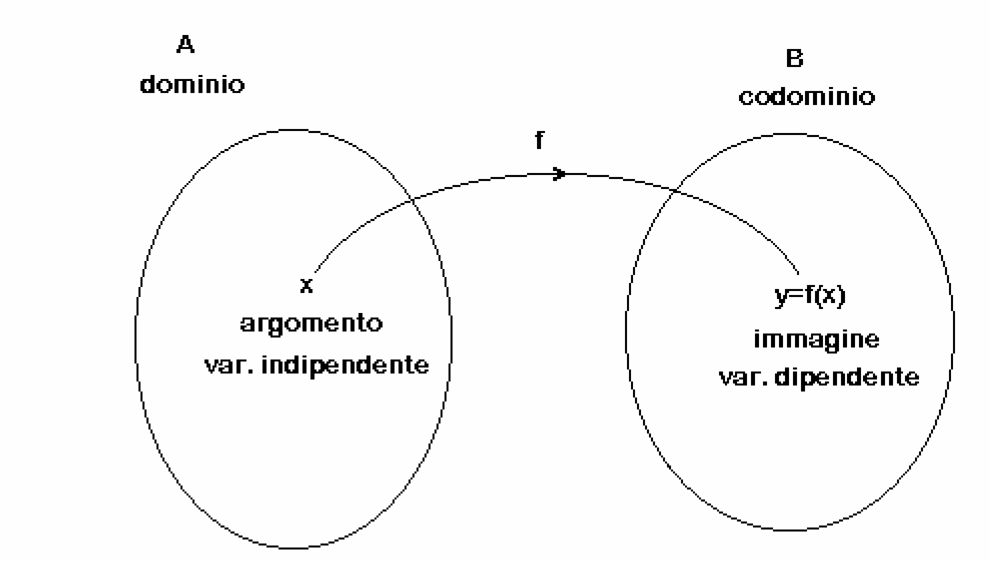
Funzioni

DEFINIZIONE: Consideriamo due insiemi, A e B. Una relazione che associa agli elementi dell'insieme A gli elementi dell'insieme B in modo tale che ad ogni elemento dell'insieme A corrisponda al più un solo elemento dell'insieme B si chiama *funzione*.

Si scrive $f : A \to B$, per indicare che la relazione associa elementi di A ad elementi di B e non viceversa. L'insieme A viene detto *dominio* della funzione e l'insieme B *codominio*. Nel corso ci occuperemo soprattutto di funzioni numeriche in cui gli insiemi A e B coincidono entrambi con l'insieme dei numeri reali. In questi casi, si indica il generico elemento dell'insieme A con una lettera, di solito x e si dà l'espressione analitica esplicita per il calcolo dell'elemento di B con riferimento ad x.
Da questo punto di vista, la funzione può essere vista come una "scatola nera" in cui entrano i numeri (gli elementi di A) ed escono altri numeri (gli elementi di B). Si dice quindi che la variabile x è l'input e $f(x)$, il risultato del calcolo a partire da x, è l'output.
Inoltre, lo stesso legame viene anche espresso dicendo che "$f(x)$ è l'immagine di x attraverso f". x viene spesso chiamato "argomento" della funzione f.

Poiché il ruolo svolto dai due numeri in ingresso e in uscita non è simmetrico e il secondo è effettivamente calcolato a partire dal primo, alla variabile in ingresso si dà il nome di variabile indipendente mentre a quella in uscita si dà il nome di variabile dipendente.

La situazione è riassunta nel grafico seguente:



Facciamo qualche esempio.

- In un semplice modello di mercato, si può ipotizzare che la domanda di un bene decresca al crescere del prezzo del bene. Sia p il prezzo del bene. La relazione che esprime il legame associa ad un numero reale (il prezzo del bene) un altro numero reale (la quantità domandata): scriveremo allora: $d : R \to R$. Se conosciamo i dettagli della relazione potremo scriverne la sua *espressione analitica*, cioè una regola che permette di ricavare a partire dal prezzo la quantità domandata. Ad esempio, la domanda d potrebbe essere legata al prezzo p dalla relazione

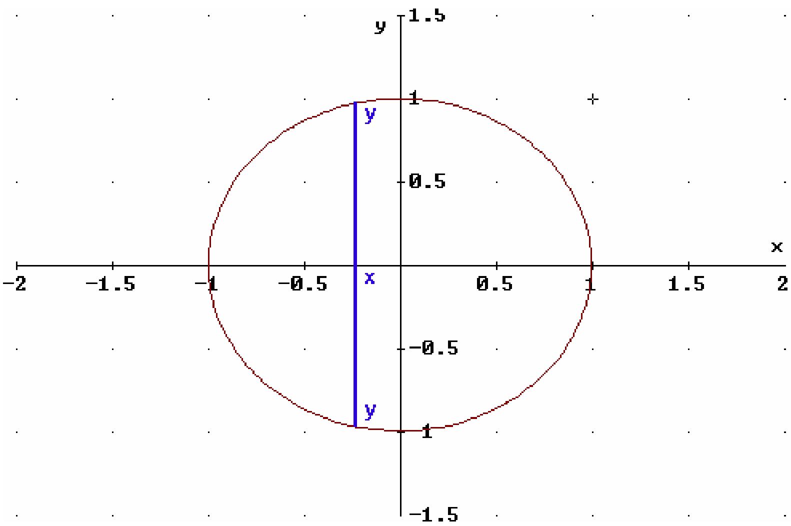
$d(p)=1000-20p$. Ad un certo valore di *p* corrisponderà una certa quantità domandata: ad esempio per un prezzo di 10 unità corrisponderà una domanda di $d(10)=1000-20\cdot 10=800$.

- Un'azienda produce un bene per il quale sostiene in genere due tipi di costi: i costi fissi (costi indipendenti dalla quantità di bene prodotto) e i costi variabili (dipendenti dalla quantità di bene). Per esempio, un'azienda produttrice di scarpe potrebbe avere come costo fisso quello di un macchinario per il taglio del pellame. Questo costo è indipendente dal numero di scarpe prodotte; il costo del pellame, invece, che pure è da sostenere, è variabile nel senso che più scarpe si producono più pellame bisogna acquistare. Si può dare di questa situazione un modello semplificato considerando che i costi *C*, dipendono dalla quantità prodotta *q* con una relazione del tipo $C(q)=a+bq$. *a* e *b* sono due numeri positivi. La scrittura *C(q)* indica che il costo *C* dipende da *q*. Si osservi che il costo corrispondente ad una produzione di 0 scarpe ($q = 0$) non è nullo ma corrisponde ad *a*. Questo è ragionevole se si pensa che comunque il macchinario va acquistato e il suo costo grava anche se non si producono scarpe.

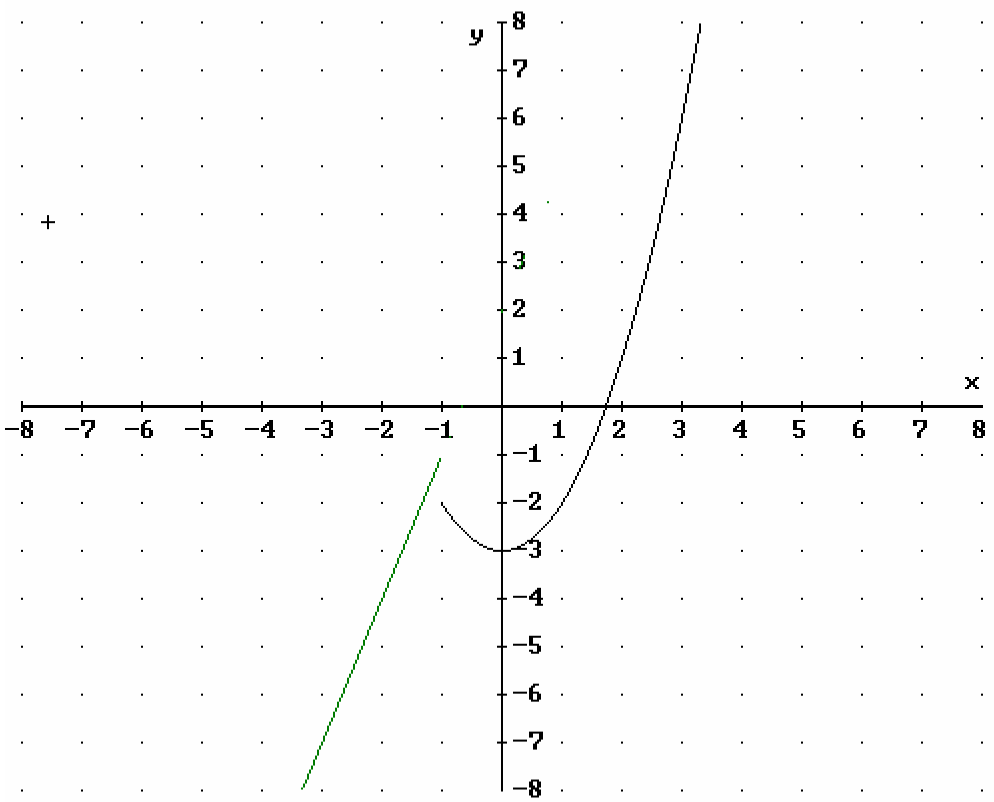
Si osservi che la cosa che conta in questi esempi non è la lettera che è stata scelta per descrivere la funzione ma il legame stesso che la funzione esprime. In altre parole, le funzioni $C(q)=a+bq$ e $C(x)=a+bx$ (se dominio, codominio, *a* e *b* sono gli stessi) *sono esattamente la stessa funzione*.

Il modo più immediato di rappresentare una funzione, oltre a quello di scriverne esplicitamente la sua espressione analitica, è quello grafico. In un grafico cartesiano, si possono rappresentare i valori degli input sull'asse *x* e quelli in output sull'asse *y*. Se $y = f(x)$, il punto di coordinate (x, y) è un punto della funzione. Unendo tutti i possibili punti si ottiene il grafico della funzione. Per le funzioni più semplici, lo studio del grafico permette di stabilire le proprietà della funzione stessa senza bisogno di analizzare l'elenco delle coppie di valori (peraltro di solito infinito).

OSSERVAZIONE: la definizione di funzione dice che ad un elemento del dominio si associa al più un solo elemento del codominio. Quindi in corrispondenza di una certa *x* fissata deve esserci al massimo una *y* (oppure non ci deve essere proprio). Pertanto, il grafico di una circonferenza con centro nell'origine e raggio unitario *non* è quello di una funzione, perché ad ogni *x* compresa tra -1 e 1 sono associate *due y* una sopra e una sotto l'asse.



OSSERVAZIONE: la definizione di una funzione non deve necessariamente essere un'unica espressione analitica. Per esempio, l'espressione $f(x)=\begin{cases}3x+2 \text{ per } x<-1\\ x^2-3 \text{ per } x\geq -1\end{cases}$ definisce una funzione per tutti i valori reali di *x*. Per i valori minori di –1, la funzione associa ad *x* il valore $5x+2$, per i valori maggiori o uguali a –1, il valore x^2-3. La definizione non è ambigua e quindi si tratta effettivamente di una funzione. Il suo grafico sarà formato da una semiretta per le *x* minori di –1 e da un arco di parabola per le *x* maggiori di –1.



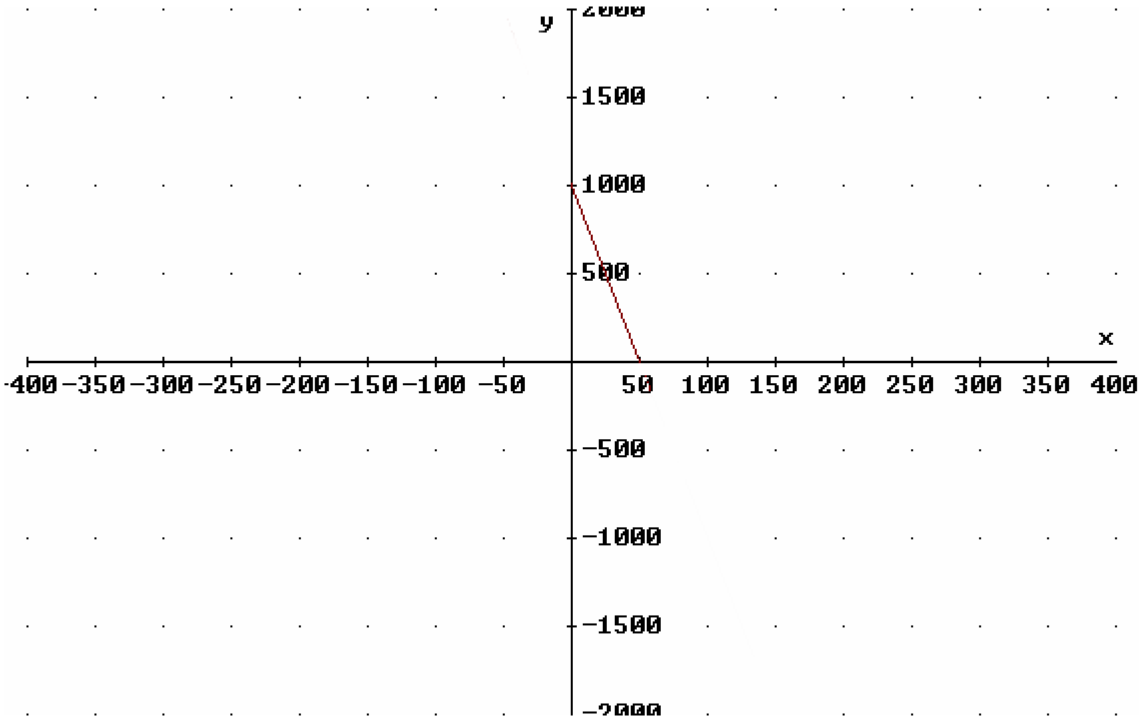
Campo di esistenza

DEFINZIONE: L'insieme dei valori del dominio per cui una funzione è definita si chiama *campo di esistenza della funzione*.

Quando di una funzione si dà la sola espressione analitica si dà anche implicitamente il suo campo di esistenza nel senso che si sottintende che essa è definita nel dominio più ampio possibile all'interno dei numeri reali. Così, se si scrive semplicemente $f(x)=3x+2$, si intende la funzione $f(x)=3x+2$ con dominio tutto l'insieme dei numeri reali. E, allo stesso modo, se si scrive $f(x)=\sqrt{x-2}$ si intende la funzione $f(x)=\sqrt{x-2}$ con dominio i numeri reali maggiori o uguali a 2. In questo caso si parla di "dominio naturale" della funzione. Il problema, in questi casi è quello di trovare, data la funzione, il suo dominio naturale. In generale questo problema si risolve con l'aiuto di disequazioni.

Altrimenti, la definizione della funzione *deve* includere anche l'indicazione del dominio in cui essa è definita. In alcuni casi, infatti tale indicazione proviene dal particolare significato che la funzione ha nell'applicazione considerata.

ESEMPIO: la funzione $d(p)=1000-20p$ è definita per $0<p<50$ perché non ha senso parlare di prezzi negativi né di domanda negativa. Il suo grafico, quindi, non è quello di una retta ma di un segmento di retta.



Possiamo allora dire che una funzione è definita non solo dalla sua espressione analitica ma anche dal suo dominio di definizione. Funzioni che hanno la stessa espressione analitica ma diverso dominio sono quindi *diverse*.

Esercizi

1) Data $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ calcolare $f(-1)$, $f(0)$ $f(1)$ $f(2)$ $f(3)$, $f(4)$
2) Data $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ calcolare $f(0)$ $f(-3/4)$ $f(-x)$ $f(1/x)$, $1/f(x)$
3) Calcolare il campo di esistenza delle seguenti funzioni
   a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
   b) $f(x) = \sqrt{1+x}$
   c) $f(x) = \sqrt{x - x^2}$
   d) $f(x) = \ln(x-3)$
   e) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
   f) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-9}$
   g) $f(x) = \log\dfrac{x+2}{x+3}$

Le funzioni elementari

Funzioni lineari

DEFINIZIONE: Si dicono funzioni lineari le funzioni la cui espressione analitica è $f(x) = mx$ o $y = mx$.

Le funzioni lineari sono rappresentate da rette passanti per l'origine degli assi. Il numero *m* prende il nome di coefficiente angolare della retta ed è legato all'inclinazione della retta stessa rispetto all'asse *x* (*m* è la tangente trigonometrica dell'angolo tra la retta e il verso positivo dell'asse *x*).

Le funzioni lineari esprimono il legame di *proporzionalità diretta* tra due grandezze: al raddoppiare, triplicare, ecc. dell'una, anche l'altra raddoppia, triplica, ecc. Valgono poi due importanti proprietà. Le funzioni lineari sono

- additive, cioè $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ (in altre parole l'immagine della somma è la somma delle immagini)
- omogenee, cioè $f(ax_1) = af(x_1)$

Queste due proprietà caratterizzano completamente le funzioni lineari, nel senso che se una funzione ha queste due proprietà necessariamente è una funzione lineare.

Funzioni lineari affini

DEFINIZIONE: Si dicono funzioni lineari affini le funzioni la cui espressione analitica è $f(x) = mx + q$ o $y = mx + q$.

Le funzioni lineari affini sono rappresentate da rette non passanti per l'origine degli assi. Il numero *m* prende il nome di "coefficiente angolare della retta" ed è legato all'inclinazione della retta stessa rispetto all'asse *x* (*m* è la tangente trigonometrica dell'angolo tra la retta e il verso positivo dell'asse *x*). Il numero *q* prende il nome di "ordinata all'origine" o di "intercetta". Esempi di funzioni lineari affini sono quelli sopra illustrati. Per abuso di linguaggio, spesso le funzioni lineari affini si chiamano semplicemente “lineari”

Un'applicazione delle funzioni lineari affini all'economia

Un problema che si presenta spesso in economia è quello della determinazione del prezzo di equilibrio fra domanda e offerta in un mercato in libera concorrenza. In economia si parla di concorrenza perfetta quando il mercato soddisfa ad alcuni requisiti fondamentali:

- omogeneità di prodotto
- trasparenza del mercato (ogni operatore deve conoscere le condizioni di domanda, di offerta e il relativo prezzo)
- libertà di ingresso (ogni operatore deve essere libero di entrare o uscire dal mercato secondo le propria convenienza)
- frazionamento della domanda e dell'offerta (devono essere presenti sul mercato molti produttori e molti consumatori in modo che nessun singolo operatore possa influire sul prezzo del bene)

Quando un mercato soddisfa queste caratteristiche il prezzo di un bene è determinato dall'incontro tra domanda e offerta. Il modello più semplice per un mercato in libera concorrenza è quello in cui le funzioni di domanda e di offerta sono lineari affini con variabile il prezzo.
La funzione domanda è $q_d = a - bp$ dove *a* e *b* sono quantità positive. *a* prende il nome di "mercato potenziale" (tutta la domanda a merce regalata). Al crescere di *p* la domanda diminuisce.
La funzione offerta è $q_o = -c + dp$ dove *c* e *d* sono quantità positive. *a* prende il nome di "mercato potenziale" (tutta la domanda a merce regalata). Al crescere di *p* l'offerta aumenta. Per i valori di *p* inferiori a *c*/*d* l'offerta è negativa e quindi non ha significato (non conviene vendere a prezzi troppo bassi)

Il punto di equilibrio è dato dall'incontro tra domanda e offerta e quindi corrisponde alla soluzione del sistema tra le tre equazioni. $\begin{cases} q_d = a - bp \\ q_o = -c + dp \\ q_d = q_o \end{cases}$.

OSSERVAZIONE: la costruzione di modelli matematici in economia è una procedura molto delicata che spesso tiene conto delle numerose variabili in gioco. I modelli sono di solito costruiti dopo un'attenta analisi statistica delle serie storiche e in ogni caso rappresentano solo *parzialmente* la realtà dei fatti. Compito dell'economista è quello di valutare i risultati ottenuti e la loro validità. Si osservi inoltre che mentre la matematica lavora con i numeri reali, la realtà ha quasi sempre a che fare con numeri interi. La ricerca di soluzioni ottimali nell'ambito dei numeri reali per passare poi, tramite arrotondamenti, ai numeri interi più vicini, potrebbe non essere una strada corretta per la risoluzione di particolari problemi (ad esempio, la programmazione lineare).

Funzioni quadratiche

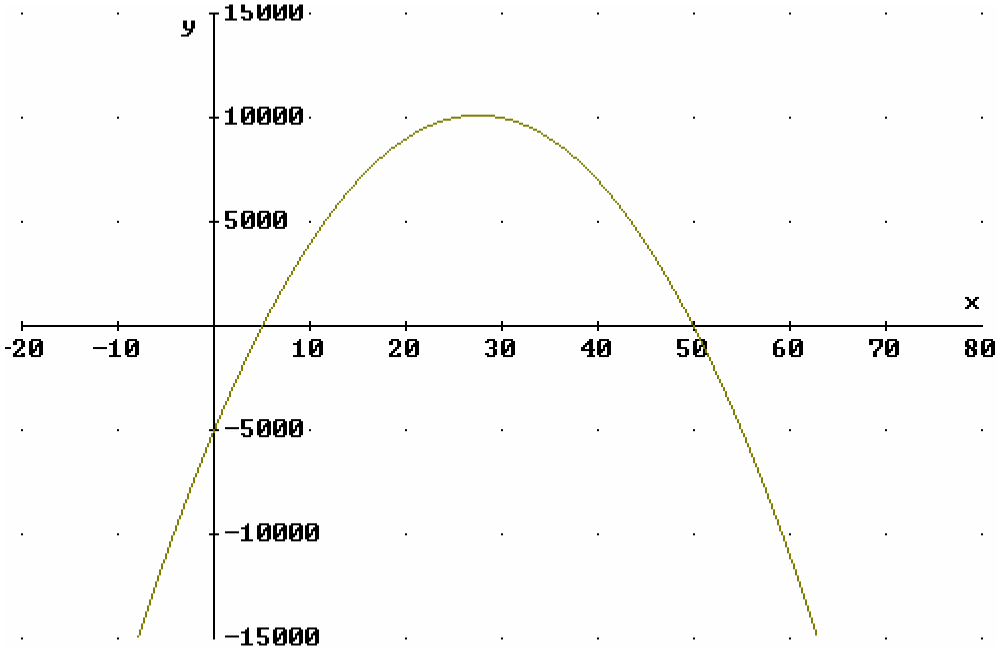
DEFINIZIONE: Si dicono funzioni quadratiche le funzioni la cui espressione analitica è $f(x) = ax^2 + bx + c$ o $y = ax^2 + bx + c$.

Le funzioni quadratiche sono rappresentate da parabole con asse parallelo all'asse delle *y*. La forma della parabola dipende dal coefficiente *a*. Se *b* e *c* sono entrambi nulli, si ottiene la relazione $f(x) = ax^2$ che esprime la *proporzionalità quadratica*, cioè il fatto che di due grandezze una sia proporzionale al quadrato dell'altra. La situazione è effettivamente possibile come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO (del monopolista): in regime di monopolio, il prezzo di vendita può essere stabilito dal produttore. Chiamiamo con *q* la quantità prodotta di un certo bene e supponiamo che essa sia interamente venduta al prezzo unitario *p*. Supponiamo che *q* dipenda linearmente da *p*, cioè che $q = a - bp$, dove *a* e *b* sono numeri positivi. La quantità decresce al crescere di *p*, come è ovvio. Anche i costi dipendono dalla quantità *q* e supponiamo ancora che essi siano lineari: $C = f + vq$ (dove abbiamo indicato con *f* i costi fissi e con *v* i costi variabili). Il ricavo ottenuto è uguale alla quantità prodotta (che viene interamente venduta) per il prezzo unitario: $R = p(a - bp)$ e quindi l'utile del monopolista è uguale a

$$U(p) = R - C = p(a - bp) - (f + v(a - bp)) = ap - bp^2 - f - av + bvp$$

Come si vede si tratta di una funzione quadratica. Fissindo dei particolari valori dei parametri $q = 1000 - 20p$, $C = 10 + 5q$. si ottiene $U(p) = -20p^2 + 1100p - 5010$



Osserviamo le particolarità del grafico. Al prezzo nullo corrisponde un utile negativo: infatti in questo caso si devono sostenere i costi senza avere un ricavo. All'aumentare del prezzo l'utile aumenta e diventa positivo da un certo punto in poi. Al crescere ulteriore del prezzo, l'utile aumenta ancora fino a raggiungere il suo massimo ma poi decresce e diventa nuovamente negativo. Il motivo è il seguente: all'aumentare del prezzo, la quantità domandata diminuisce e di conseguenza diminuisce anche il profitto.

Proporzionalità inversa

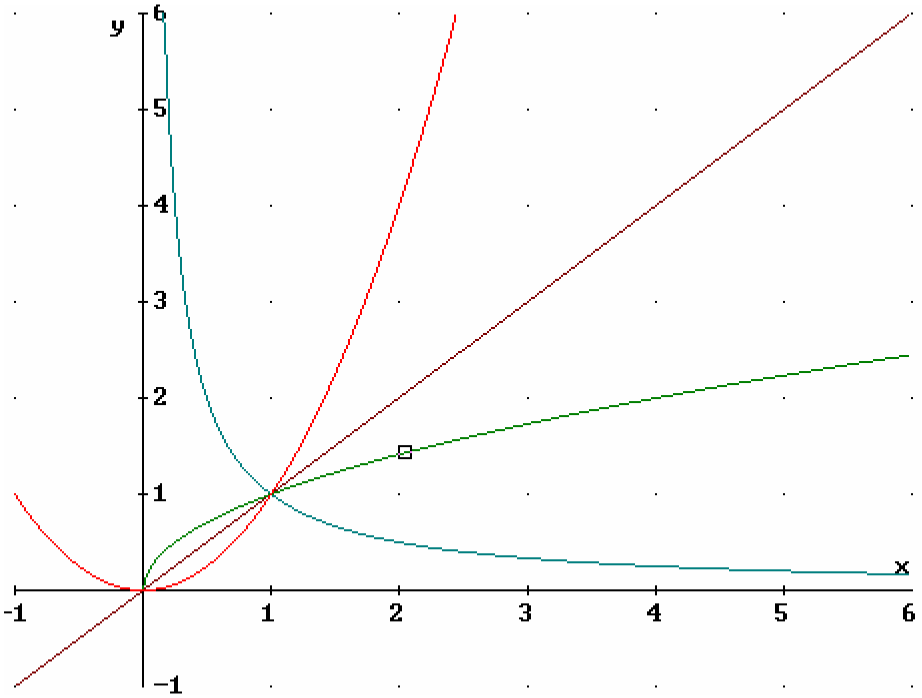
DEFINIZIONE: due grandezze *x*, e *y* sono in legame di proporzionalità inversa quando il loro prodotto è costante, cioè $xy = k$. Il grafico di una tale legge è quello di un'iperbole avente per asintoti gli assi cartesiani.

Nel campo economico, una tale legge può essere considerata quando si studia il legame tra la domanda di una merce e il suo prezzo. Se il legame è appunto di proporzionalità inversa il prodotto tra le due grandezze (domanda e prezzo) è costante (cioè il fatturato non cambia se vendo meno a prezzi più alti)

Funzioni potenza

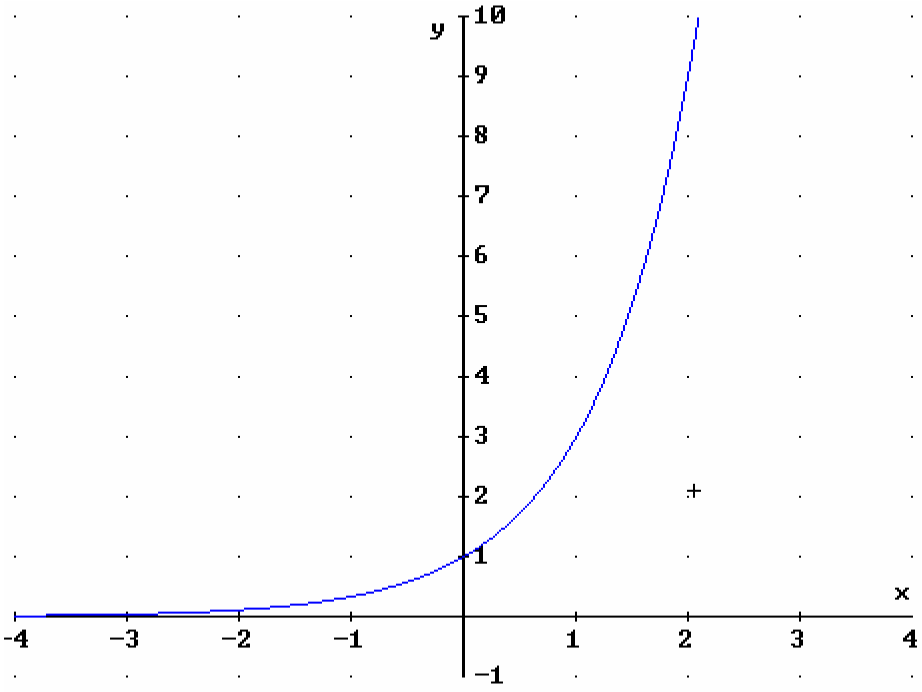
Il caso che generalizza le funzioni lineari e quelle quadratiche è quello delle funzioni potenza,. $f(x) = kx^a$. Esse, in generale, sono definite solo per $x > 0$ e per $a \neq 0$, ma almeno per i valori interi di *a* si considerano definite per tutti gli *x* reali (i casi particolari sono quelli corrispondenti ad *a* intero positivo, *a* intero negativo e $a = \frac{1}{n}$). I grafici di queste funzioni sono particolarmente importanti e devono essere ricordati con precisione.

Un esempio importante, sul quale torneremo nelle prossime lezioni, è dato dal cosiddetto problema delle scorte. Un'azienda si trova a doversi approvvigionare annualmente di una quantità S di una data materia prima. Il costo unitario di trasporto per l'approvvigionamento è dato da un certo valore *g*, mentre il costo di stoccaggio è dato da una certa quantità *m*. Si capisce che se si ordina troppo di rado i costi di stoccaggio diventano eccessivi, mentre nel caso opposto, cioè ordinando troppo di frequente, sono i costi di trasporto a diventare eccessivi. Faremo vedere che il costo minimo si trova più o meno a metà tra questi estremi, e per la precisione nel punto corrispondente ad una quantita per ordinazione uguale a $Q = \sqrt{\frac{2Sg}{m}}$. In questo caso, quindi, la dipendenza di Q da m è del tipo di una funzione potenza con $a = \frac{1}{2}$. Di seguito i grafici delle funzioni potenza con $k = 1$ e a rispettivamente uguale a –1, 1/2, 1, 2.

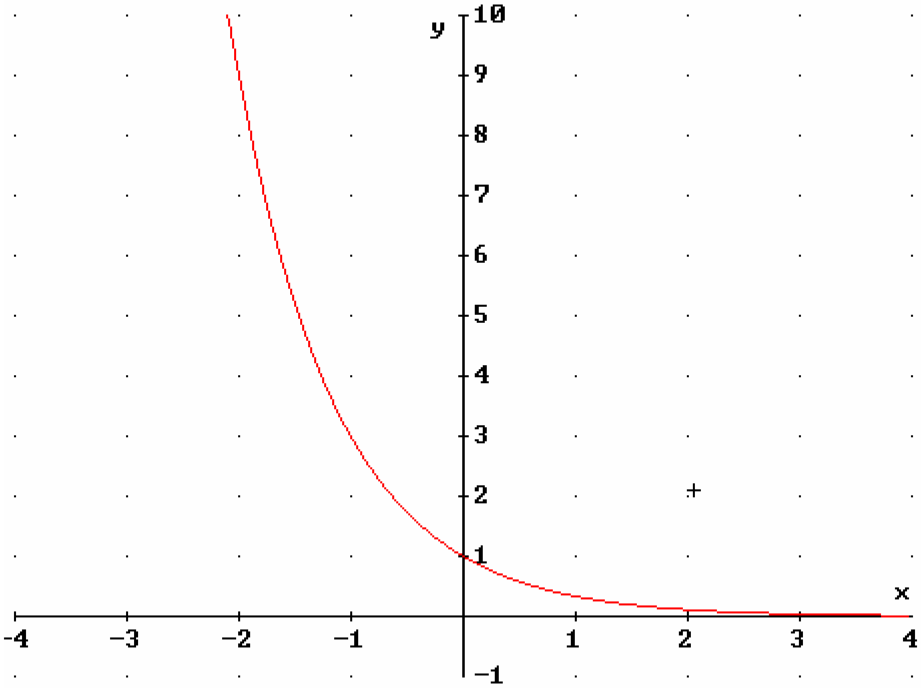


Funzione esponenziale

DEFINIZIONE: Si dice funzione esponenziale la funzione $f(x) = a^x$, dove a è un numero reale positivo diverso da 1. Quando $a > 1$ il grafico della funzione esponenziale è mostrato nella figura seguente



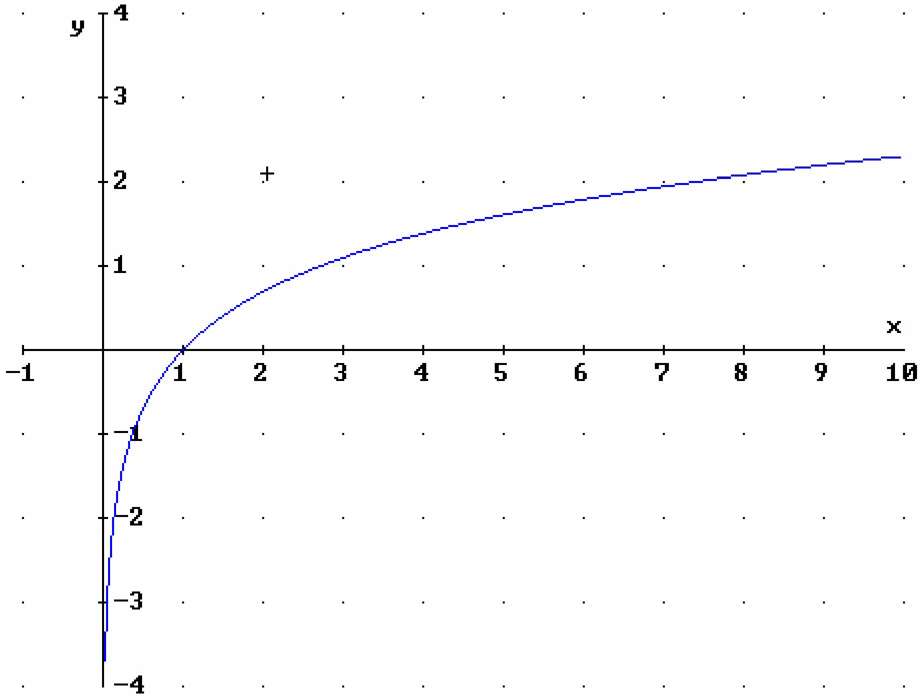
L'asse x è un *asintoto* per la funzione esponenziale, cioè il grafico della funzione si avvicina indefinitamente ad essa senza toccarlo.
Quando invece $0 < a < 1$ il grafico è il simmetrico del precedente rispetto all'asse delle y.



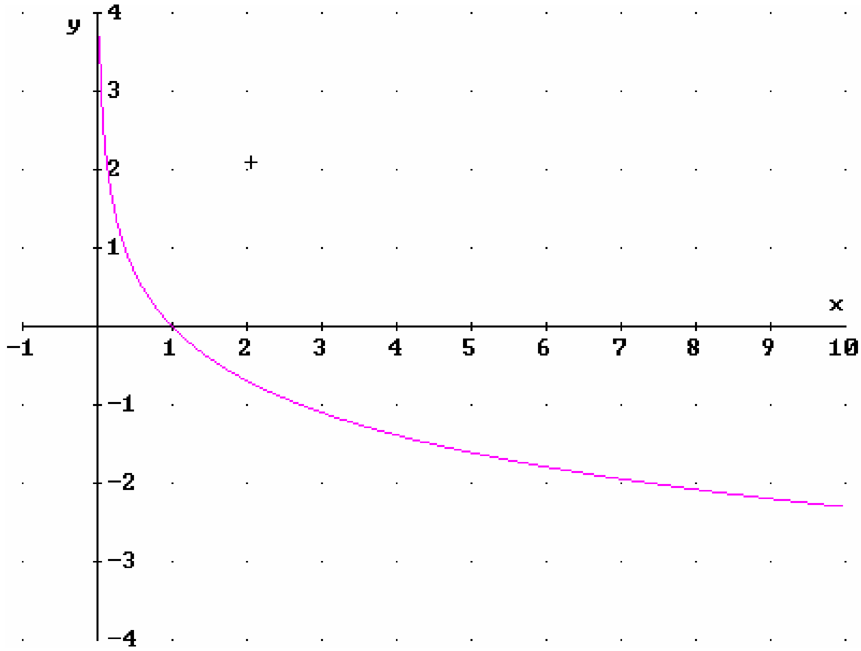
Entrambi i grafici passano per il punto di coordinate (0, 1).

Funzione logaritimica

DEFINIZIONE: Si dice funzione logaritmica la funzione $f(x) = \log_a x$, dove a è un numero reale positivo diverso da 1. Quando $a > 1$ il grafico della funzione logaritmica è mostrato nella figura seguente



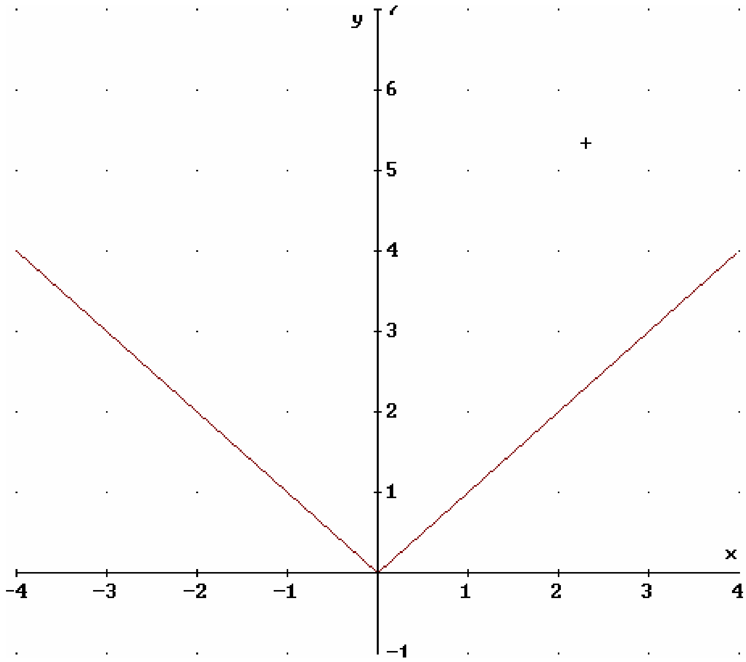
Il caso della base minore di 1 è analogo.



Entrambi i grafici passano per il punto di coordinate (1, 0).
Come si vede dal confronto con il precedente grafico dell'esponenziale, se la base è uguale i grafici sono identici ma cambia l'orientamento. Ritorneremo su questa osservazione nella prossima lezione. Di solito i grafici logaritmici che si usano più spesso sono quelli nelle basi 10 ed *e*.

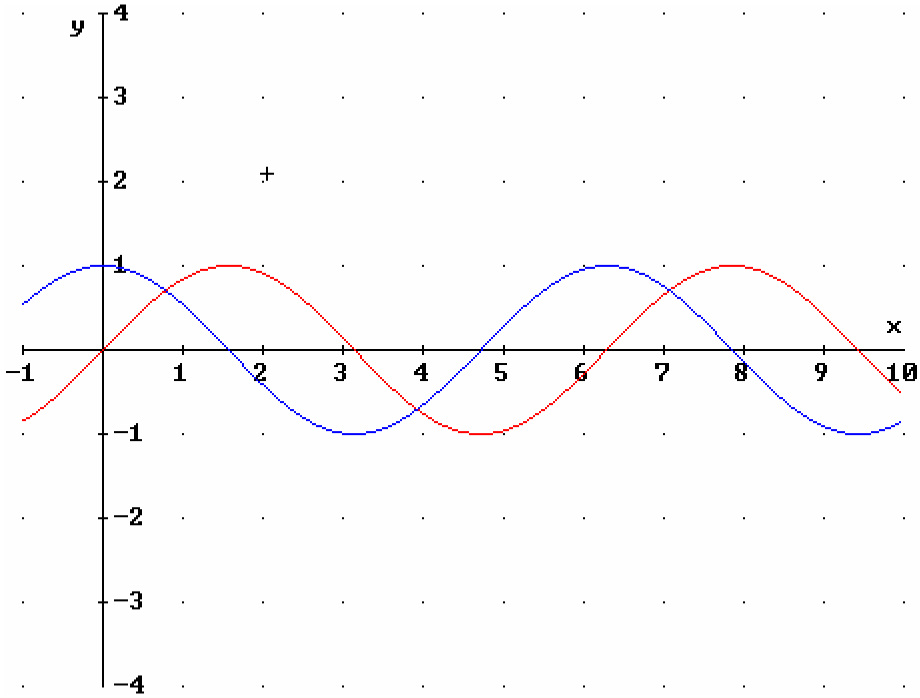
Funzione valore assoluto

La funzione valore assoluto è molto semplice ed associa ad un numero reale il suo valore assoluto che è il numero stesso preso *comunque* con il segno positivo. Il valore assoluto si indica con il simbolo $f(x) = |x|$. Pertanto, $|2| = 2$ e $|-3| = 3$. Naturalmente, per tutti i numeri reali positivi la funzione valore assoluto associa al numero il numero stesso, mentre ai numeri negativi associa il loro opposto (che è positivo essendo i numeri negativi). Con un linguaggio un po' impreciso, potremmo dire che il valore assoluto trasforma tutto ciò che è negativo in positivo lasciando le quantità positive intatte. Il grafico della funzione valore assoluto coincide con la retta $y = x$ per le x positive e con la retta $y = -x$ per le x negative.



Funzioni trigonometriche

Le funzioni trigonometriche sono soprattutto adatte a descrivere fenomeni di natura periodica. Esse sono di solito introdotte nel modo seguente. Si considera la circonferenza di centro l'origine e di raggio unitario. Misuriamo i punti a partire dal punto di coordinate (1, 0) in senso antiorario. La funzione che associa alla lunghezza *x* l'ascissa del punto si chiama coseno di *x* e viene indicata con $f(x) = \cos(x)$. La funzione che associa alla lunghezza *x* l'ordinata del punto si chiama seno di *x* e viene indicata con $f(x) = \text{sen}(x)$. Il grafico delle due funzioni è il seguente (in blu il coseno, in rosso il seno)



Le funzioni trigonometriche sono periodiche perché da un certo punto in poi (dopo un giro) i valori si ripetono uguali a se stessi. Inoltre, le due curve sono di fatto la stessa curva traslata orizzontalmente di una quantità uguale a $\pi/2$. Poiché alla lunghezza *x* dell'arco si può associare immediatamente l'angolo al centro che sottende l'arco *x*, si parla di solito di "seno dell'angolo *x*" e di "coseno dell'angolo *x*". Questa misurazione degli angoli si chiama "misurazione in radianti" e ha il non trascurabile vantaggio di essere una misura decimale (e non sessagesimale, come avviene per i gradi solitamente usati).

Esercizi

1. Sia *f*(x) una funzione lineare. Determinare l'espressione analitica di *f* sapendo che *f*(–1) = 2 e che *f*(2) = –3
2. Sia *f*(x) una funzione quadratica. Determinare l'espressione analitica di *f* sapendo che *f*(0) = 1, che *f*(1) = 0 e che *f*(3) = 5
3. Come è noto, negli Stati Uniti la temperatura viene di solito misurata in gradi Fahrenheit. Si sa che a 0 °C corrisponde una temperatura di 32 °F e che a 100 °C corrisponde una temperatura di 212 °F. Stabilire le due leggi (lineari) che permettono di calcolare la temperatura in gradi centigradi a partire da quella in gradi Fahrenheit e viceversa.
4. Tracciare il grafico della funzione logaritmica di base 10. A quali ordinate corrispondono i punti del grafico di ascissa 100? 1000? 5000? 10000?
5. Tracciare il grafico della funzione logaritmica di base *e*. A quali ascisse corrispondono i punti del grafico di ordinata 1? 2? 3?

6. La domanda di un bene è data dalla funzione $x_d = 300 - 10p$ e l'offerta dalla funzione $x_o = -20 + 6p$. Trovare il prezzo di equilibrio e il corrispondente valore della domanda e dell'offerta.

Da ricordare

- La definizione di funzione e i concetti ad essa associati (dominio, codominio, proprietà grafiche, simbologia)
- Le funzioni elementari (lineare, affine, potenza, logaritmiche e esponenziali) e i loro grafici con le proprietà essenziali

Soluzioni

1. Poiché f(x) è una funzione lineare la sua espressione analitica è del tipo $f(x) = ax + b$. Il problema ci dice che $f(-1) = 2$ e che $f(2) = -3$. Quindi dovrà essere $f(-1) = -a + b = 2$ e $f(2) = 2a + b = -3$. Si ha così un sistema di due equazioni in due incognite: $\begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a + b = -3 \end{cases}$.

   Ricavando b dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene $\begin{cases} b = 2 + a \\ 2a + 2 + a = -3 \end{cases}$ cioè

   $\begin{cases} b = 2 + a \\ 3a = -5 \end{cases}$, da cui $\begin{cases} b = \dfrac{1}{3} \\ a = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$. La funzione cercata è quindi $f(x) = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{1}{3}$.
2. Poiché f(x) è una funzione quadratica la sua espressione analitica è del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Il problema ci dice che $f(0) = 1$, che $f(1) = 0$ e che $f(3) = 5$. Quindi dovrà essere $f(0) = c = 1$, $f(1) = a + b + c = 0$ e $f(3) = 9a + 3b + c = 5$. Si ha così un sistema di tre equazioni in tre incognite: $\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 5 \end{cases}$. Sostituendo c nella seconda e nella terza equazione si ha

   $\begin{cases} c = 1 \\ a + b = -1 \\ 9a + 3b = 4 \end{cases}$. Ricavando b dalla seconda equazione e sostituendo nella terza, $\begin{cases} c = 1 \\ b = -1 - a \\ 9a - 3 - 3a = 4 \end{cases}$

   da cui $\begin{cases} c = 1 \\ b = -1 - a \\ 6a = 7 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} c = 1 \\ b = -\dfrac{13}{6} \\ a = \dfrac{7}{6} \end{cases}$. La funzione cercata è quindi $f(x) = \dfrac{7}{6}x^2 - \dfrac{13}{6}x + 1$
3. Se vogliamo scrivere la funzione che permette di calcolare i gradi Fahrenheit a partire dai gradi centigradi, dobbiamo cercare una funzione lineare, analogamente all'esercizio 1, per cui $f(0) = 32$ e che $f(100) = 212$. Con un procedimento simile si ottiene $f(x) = 32 + \dfrac{9}{5}x$. Per l'altro caso, le condizioni sono $f(32) = 0$ e che $f(212) = 100$ e si ottiene $f(x) = \dfrac{5}{9}x - \dfrac{160}{9}$
4. Ai punti del grafico di ascissa 100, 1000, 5000, 10000 corrispondono rispettivamente i punti di ordinata 2, 3, 3,69897000 e 4.
5. Ai punti di ordinata 1, 2 e 3 corrispondono i punti di ascissa e, e^2 e e^3.
6. Il problema si risolve semplicemente con l'equazione $300 - 10p = -20 + 6p$ (uguaglianza tra domanda e offerta). La soluzione è $p = 20$ a cui corrisponde una domanda di 100 (e un'offerta uguale, visto che si tratta del punto di equilibrio)

Lezione 5-6

Caratteristiche e proprietà delle funzioni

In questa lezione elencheremo le caratteristiche che le funzioni possono avere. Prima di iniziare è opportuna una importante precisazione.

DEFINIZIONE: quando le proprietà sono valide sono in vicinanza di un punto si parla di proprietà *locali*; quando invece le proprietà sono valide dovunque, si parla di proprietà *globali*.

Funzioni pari e dispari

DEFINIZIONE: Una funzione si dice *pari* se $f(x) = f(-x)$. In termini grafici, la relazione precedente significa che i valori che la funzione assume in punti simmetrici rispetto all'origine sono uguali; ad esempio, il valore di $f(3)$ è uguale al valore di $f(-3)$. Il grafico della funzione è quindi simmetrico rispetto all'asse *y*.

DEFINIZIONE: Una funzione si dice *dispari* se $f(x) = -f(-x)$. In termini grafici, la relazione precedente significa che i valori che la funzione assume in punti simmetrici rispetto all'origine sono opposti; ad esempio, il valore di $f(3)$ è uguale a $-f(-3)$. Il grafico della funzione è quindi simmetrico rispetto all'origine.

ESEMPI: le funzioni potenza con esponente pari sono tutte funzioni pari, mentre quelle con esponente dispari sono tutte funzioni dispari. La funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$ è una funzione dispari; la funzione $f(x) = \cos x$ è una funzione pari. Le funzioni $f(x) = \ln x$ e $f(x) = e^x$ non sono né pari né dispari.

Funzioni limitate

DEFINIZIONE: si dice *superiormente limitata* una funzione il cui grafico sta tutto sotto una retta di equazione *y* = k. In formule: $f(x) \le k$

DEFINIZIONE: si dice *inferiormente limitata* una funzione il cui grafico sta tutto sopra una retta di equazione *y* = k. In formule: $f(x) \ge k$

DEFINIZIONE: si dice *limitata* una funzione il cui grafico è compreso in una striscia del piano cartesiano definita da due rette *y* = a e *y* = b. In formule: $a \le f(x) \le b$

ESEMPI: la funzione $f(x) = \ln x$ non è limitata; la funzione $f(x) = e^x$ è limitata inferiormente ma non superiormente; la funzione $f(x) = 2 - x^2$ è limitata superiormente ma non inferiormente; le funzioni $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \cos x$ e $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ sono tutte limitate (sia superiormente che inferiormente)

Funzioni crescenti, decrescenti, monotone

DEFINIZIONE: Una funzione si dice *crescente* oppure *non decrescente* se per ogni coppia di numeri *a* e *b* appartenenti al dominio della funzione tali che $a < b$ succede che $f(a) \le f(b)$.

ATTENZIONE: il termine più adatto per questa definizione è probabilmente quello di "non decrescente". Infatti la relazione $f(a) \leq f(b)$ garantisce solo che spostandosi verso destra sul grafico la quota non diminuisca: non necessariamente essa deve aumentare. Secondo questa definizione, la funzione costante $y = 1$ è una funzione crescente.

DEFINIZIONE: Una funzione si dice *decrescente* oppure *non crescente* se per ogni coppia di numeri a e b appartenenti al dominio della funzione tali che $a < b$ succede che $f(a) \geq f(b)$.

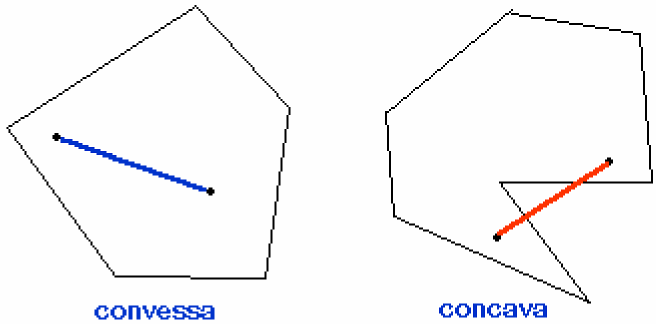
DEFINIZIONE: Se nelle definizioni precedenti valgono le relazioni di $f(a) < f(b)$ o di $f(a) > f(b)$ le funzioni si dicono *strettamente crescenti* o *decrescenti*.

DEFINIZIONE: una funzione che sia crescente o decrescente (in senso stretto o meno) si dice *monotòna*.

ESEMPI: le funzioni $f(x) = \ln x$ e $f(x) = e^x$ sono strettamente monotòne crescenti; le funzioni $f(x) = 2 - x^2$, $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \cos x$ e $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ non sono monotòne. Tuttavia, ad esempio, la funzione $f(x) = 2 - x^2$ è localmente crescente in tutti i punti $x < 0$ e localmente decrescente in tutti i punti $x > 0$.

Funzioni concave e convesse

DEFINIZIONE: una regione del piano si dice *convessa* se presi comunque due punti appartenenti alla regione, il segmento che li unisce è tutto contenuto nella regione. In caso contrario, la regione si dice *concava*.



DEFINIZIONE: si chiama *epigrafico* di una funzione f l'insieme dei punti del piano che stanno al di sopra del grafico della funzione stessa.

DEFINIZIONE: una funzione f si dice *convessa* se il suo *epigrafico* è una regione convessa, mentre si dice *concava* se la funzione $-f$ è convessa.

La definizione di convessità non ha particolare significato per le rette, per le quali il segmento che unisce due punti qualsiasi del grafico è tutto contenuto nel grafico stesso. Se la funzione considerata non contiene segmenti di rette, la funzione si dice *strettamente convessa* (o *strettamente concava*).

DEFINIZIONE: un punto x_0 per cui la funzione è concava (o convessa) alla sinistra del punto e convessa (o concava) alla sua destra si dice *punto di flesso*.

ESEMPIO: Il caso più semplice di una funzione con un punto di flesso è quello della funzione potenza $y = x^3$.

Massimi e minimi

DEFINIZIONE: una funzione *f* possiede un punto di massimo globale (o assoluto) nel punto x_0 se per ogni valore di *x* nel dominio vale la disuguaglianza $f(x_0) \geq f(x)$.

Analogamente si dà l'altra definizione.

DEFINIZIONE: una funzione *f* possiede un punto di minimo globale (o assoluto) nel punto x_0 se per ogni valore di *x* nel dominio vale la disuguaglianza $f(x_0) \leq f(x)$.

Queste definizioni sono "globali" e quindi trattano proprietà che valgono per la funzione in tutto il suo dominio.

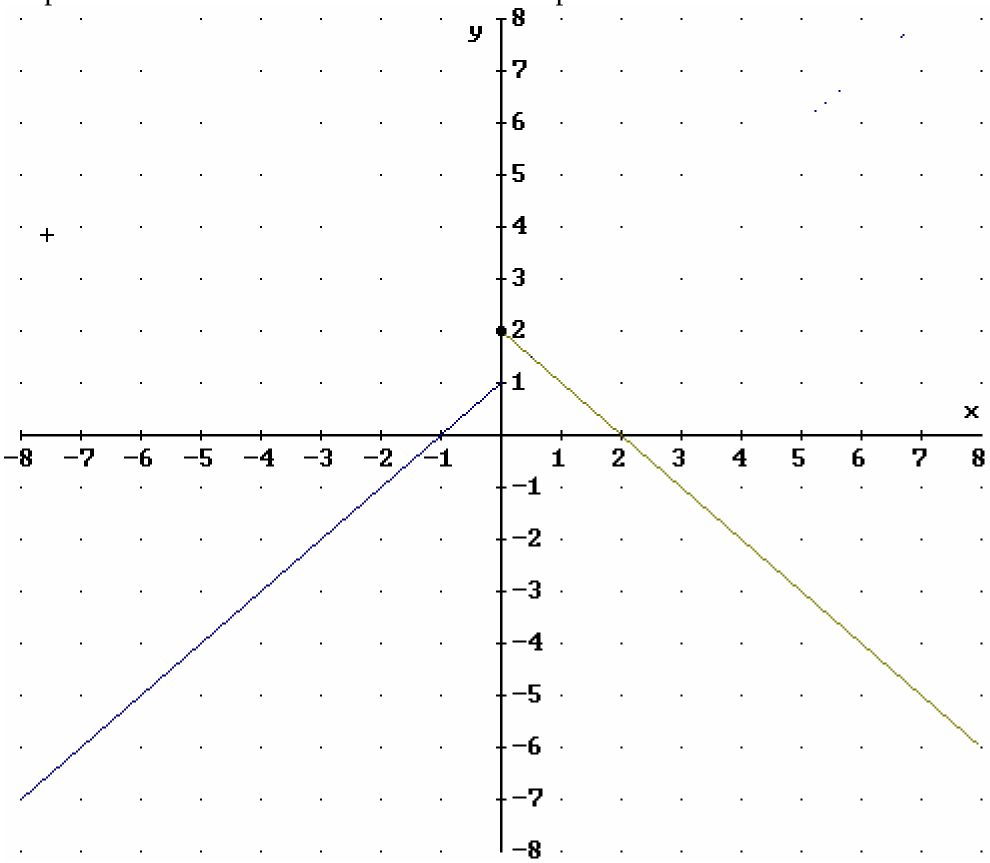
Graficamente il massimo è "il punto più alto" della funzione mentre il minimo è "il punto più basso".

Il fatto che le disuguaglianze contengano l'uguale lascia aperta la possibilità al fatto che il punti di massimo (o di minimo) non sia unico. Secondo la terminologia corrente, x_0 è il "punto di massimo" mentre $f(x_0)$ è il "valore massimo di *f*" o semplicemente "il massimo di *f*".

ESEMPI:

- la funzione $f(x) = x^2 + 2$ è una parabola con vertice nell'origine; essa ha un minimo assoluto nel punto di ascissa 0 e tale minimo vale 2.
- la funzione $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ è una parabola concava, con vertice nel punto di ascissa 1. Il vertice è il punto di massimo assoluto della funzione e vale 4.
- $f(x) = e^x$ non ha massimi né minimi assoluti
- $f(x) = \operatorname{sen} x$ ha infiniti punti di massimo assoluto nei punti $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e infiniti punti di minimo assoluto nei punti $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. I punti di ascissa $\pi + k\pi$ (e ordinata nulla) sono punti di flesso.
- la funzione $f(x) = |x|$ presenta un minimo assoluto nell'origine.
- la funzione $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ per } x < 0 \\ 2 - x \text{ per } x \geq 0 \end{cases}$ ha un massimo assoluto nel punto di ascissa 0; il massimo vale 2. Si faccia attenzione al fatto che la funzione nel punto di ascissa 0 vale 2 (guardare il segno dell'uguale nella definizione della funzione). Il punto di ascissa 0 è quindi effettivamente

un punto di massimo. Non esistono invece punti di minimo assoluto.



Le definizioni di massimo e minimo assoluto sono modificate come segue per rendere conto delle particolarità locali delle funzioni.

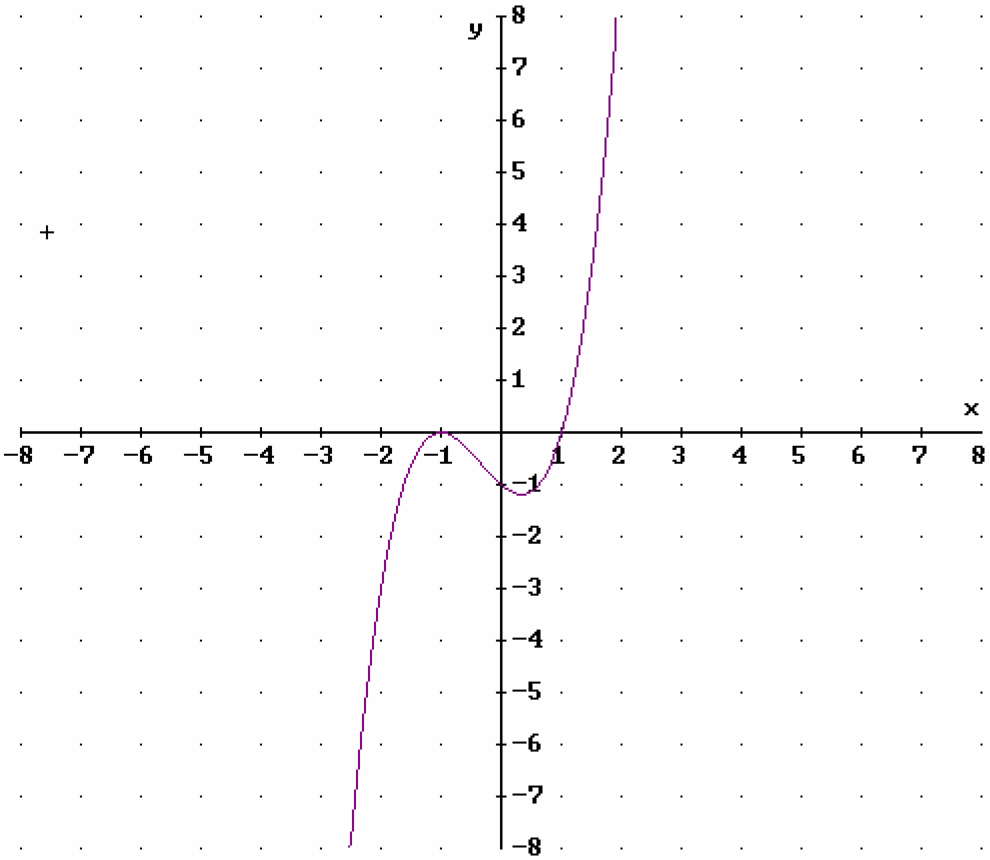
DEFINIZIONE: una funzione *f* possiede un punto di massimo locale (o relativo) nel punto x_0 se esiste un intorno del punto x_0 in cui per ogni valore di *x* nell'intorno vale la disuguaglianza $f(x_0) \geq f(x)$.

DEFINIZIONE: una funzione *f* possiede un punto di minimo locale (o relativo) nel punto x_0 se esiste un intorno del punto x_0 in cui per ogni valore di *x* nell'intorno vale la disuguaglianza $f(x_0) \geq f(x)$.

Ovviamente un massimo (minimo) globale è anche un massimo (minimo) locale mentre non è vero il contrario.

ESEMPIO:

- la funzione $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ ha il seguente grafico:



Si tratta di una cubica. Essa presenta un massimo relativo (uguale a 0) per $x = -1$ e un minimo relativo (–32/27) per $x = \frac{1}{3}$. Non esistono massimi né minimi assoluti.

Esercizi

Altri esercizi sugli argomenti di questa lezione saranno proposti alla fine della lezione 9

1. Delle seguenti funzioni, dire quali sono pari e quali sono dispari:
   a) $f(x) = x^2 + 1$
   b) $f(x) = x^3 + x$
   c) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$
   d) $f(x) = \frac{1}{x + 4}$
2. Delle seguenti funzioni dire quali sono limitate (superiormente, inferiormente o entrambi)
   a) $f(x) = x^2 + 1$
   b) $f(x) = \frac{1}{x + 4}$
   c) $f(x) = x^3 + x$
   d) $f(x) = 1 + |x + 2|$

Da ricordare

- Tutte le definizioni della lezione e i loro significati geometrici
- La distinzione tra proprietà locali e globali

Soluzioni

1.

a) $f(x) = x^2 + 1$ è pari (cambiando x in $-x$ il valore della funzione non cambia)

b) $f(x) = x^3 + x$ è dispari (cambiando x in $-x$ entrambi gli addendi cambiano segno e quindi il valore della funzione cambia segno)

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ è dispari (cambiando x in $-x$ il numeratore cambia segno mentre il denominatore no. Il quoziente, quindi, cambia segno)

d) $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$ non è né pari né dispari

2.

a) $f(x) = x^2 + 1$ è limitata inferiormente da 1

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$ non è limitata né sup. né inf. (il grafico è quello di un'iperbole equilatera)

c) $f(x) = x^3 + x$ non è limitata né sup. né inf.

d) $f(x) = 1 + |x + 2|$ è limitata inferiormente da 1

Lezione 7-8

Composizione di funzioni

Le funzioni elementari ovviamente non esauriscono il panorama delle funzioni che si studiano nelle scienze economiche. Spesso una funzione è in realtà ottenuta compiendo due o più operazioni "a catena" sulla variabile di ingresso *x*. Ad esempio, nella funzione $\sqrt{x^2 + x}$ sono indicate due operazioni: la prima associa alla variabile di ingresso *x*, l'espressione $x^2 + x$; la seconda prende questo risultato e ne calcola la radice quadrata. Naturalmente, perché ciò sia possibile è necessario che il risultato della prima operazione sia ammissibile come valore di input per la seconda.

DEFINIZIONE: date due funzioni, $f : A \to B$ e $g : C \to D$ tali che ogni valore immagine di *f* cada nell'insieme *C*, si applichi *f* e successivamente *g*. Si dice funzione composta di *f* e *g* la funzione ottenuta associando alla variabile di input di *f* l'output della *g* e si indica con $g(f(x))$.

Nell'esempio appena descritto *f* e *g* sono entrambe funzioni reali di variabile reale, $f(x) = x^2 + x$ e $g(x) = \sqrt{x}$. L'applicazione di *f* porta *x* in $x^2 + x$; la successiva applicazione di *g* porta al risultato finale $\sqrt{x^2 + x}$.

Si riesce a comprendere bene il significato delle operazioni di composizione se si pensa alle funzioni come a delle "regole" di svolgimento dei calcoli. In questo senso, la *f* del precedente esempio associa ad un numero la somma del numero stesso e del suo quadrato, mentre la *g* associa ad un numero la sua radice quadrata.

OSSERVAZIONE: la composizione delle funzioni *non* è commutativa, nel senso che se si inverte l'ordine di applicazione delle funzioni, in generale il risultato è diverso. Ad esempio, siano $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x^2$. Si ha

$$g(f(x)) = g(x^2 - 1) = \left(x^2 - 1\right)^2,$$

mentre

$$f(g(x)) = f(x^2) = x^4 - 1$$

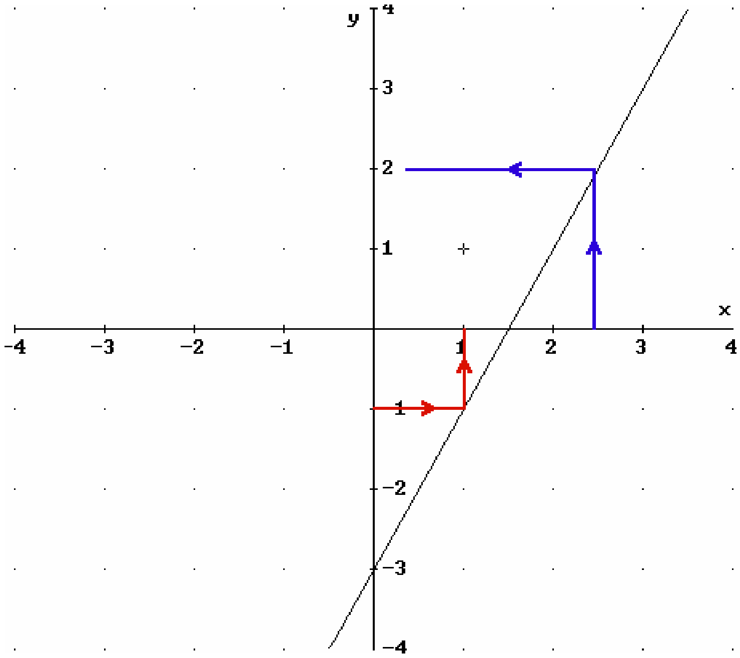
La spiegazione è la seguente. Nel primo caso si applica prima *f* e poi *g*. La *f* porta *x* in $x^2 - 1$ e lo dà come valore di input a *g*. La *g* opera elevando al quadrato il suo argomento e quindi eleva al quadrato $x^2 - 1$ dando come risultato $\left(x^2 - 1\right)^2$. Nel secondo caso si applica prima la *g* che porta *x* in x^2 e lo dà come valore di ingresso a *f*. La *f* opera elevando al quadrato il suo argomento e sottraendo 1. Il quadrato di x^2 è x^4 e quindi il risultato finale è $x^4 - 1$.

In qualche caso, la composizione di funzioni si estende a più di due funzioni, ad esempio nel caso della funzione $m(x) = \sqrt{\log \frac{x+1}{x-2}}$ che può essere considerata composta dalle funzioni $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $g(x) = \log x$ e $h(x) = \sqrt{x}$ secondo la relazione $m(x) = h\left(g\left(f(x)\right)\right)$.

Inversione di funzioni

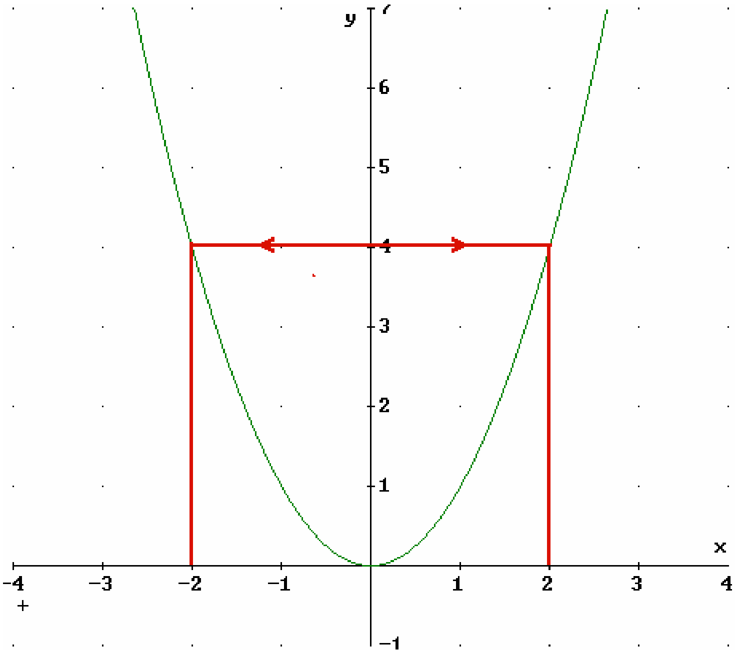
Una funzione associa ad un valore di *x* un unico valore di *y*. In questo modo viene fissato un legame tra le coppie *x* e *y*. Questo legame può essere visto anche nel senso opposto, cioè partendo dal codominio e arrivando nel dominio. Da questo punto di vista, opposto rispetto al precedente, il

legame può dare origine a una funzione ma non è necessariamente così. Si considerino i seguenti esempi.
Sia data la funzione lineare $f(x) = 2x - 3$; questa funzione associa ad un numero il suo doppio diminuito di 3. Così, ad esempio, *f* associa al numero 4 il numero 5 (il doppio di 4 meno 3). È evidente che, se volessimo seguire il percorso a ritroso partendo dal 5 (e volendo risalire al 4) dovremmo svolgere le operazioni *inverse* nell'ordine *inverso* e cioè prima *sommare* 3 e poi *dividere* per 2 (infatti 5 + 3 diviso 2 fa effettivamente 4). Il legame inverso dà quindi origine ad un'altra funzione che, per quanto abbiamo scritto, può essere ragionevolmente chiamata "inversa di *f*". essa viene indicata con $f^{-1}(x)$ ed in questo caso è data da $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$.
La procedura per trovare una tale funzione è particolarmente semplice se nell'espressione che definisce la *f* si sostituisce al posto di $f(x)$ la *y* e poi si cerca di risolvere rispetto a *x* l'equazione.
Così, nell'esempio considerato, si avrebbe $y = 2x - 3$ da cui $2x = y + 3$ e infine $x = \dfrac{y+3}{2}$. Poiché per convenzione siamo soliti attribuire alla lettera *x* il ruolo di variabile indipendente e alla *y* quello di variabile dipendente, scambiando la *x* in *y* e viceversa si ottiene di nuovo il risultato che avevamo già trovato precedentemente con un po' di ragionamento.
È interessante osservare che questa procedura ha un'importante spiegazione grafica. Consideriamo infatti il grafico della funzione $f(x) = 2x - 3$



Partendo dalla *x* si arriva alla *y* muovendosi in verticale fino a raggiungere il grafico della funzione (la retta in questo caso) e poi orizzontalmente fino a raggiungere l'asse *y* dove si legge il valore della funzione. Nella figura, in blu è indicato il percorso che porta dal punto (2.5, 0) al punto (0, 2). La funzione inversa segue il percorso opposto: parte dall'asse *y*, incontra il grafico e arriva sull'asse *x*. Nella figura, in rosso è indicato il percorso che porta dal punto (0, –1) al punto (1, 0); infatti $f^{-1}(-1) = 1$. Non è difficile intuire che in questo caso, cioè quello delle funzioni lineari e lineari affini, una tale procedura è sempre eseguibile eccetto per le funzioni "costanti", quelle cioè il cui grafico è una retta orizzontale.

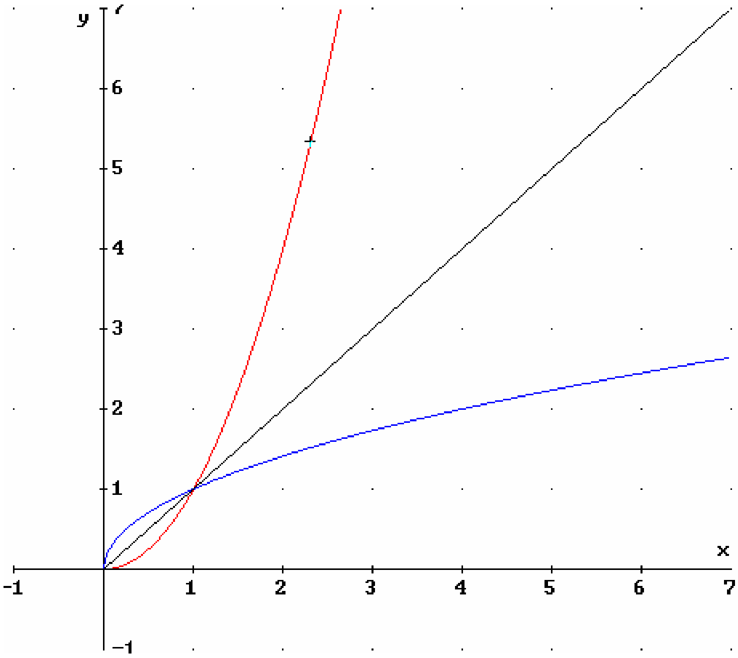
La procedura per costruire l'inversa di una funzione nel caso generale è la stessa descritta sopra, sia da un punto di vista algebrico sia da un punto di vista grafico. Tuttavia, ci sono casi in cui questa procedura non può essere eseguita perché non darebbe luogo ad una funzione. Consideriamo, ad esempio, il caso della funzione $f(x) = x^2$, il cui grafico è quello di una parabola con il vertice nell'origine degli assi.



Come si vede non è possibile arrivare *univocamente* ad un punto sull'asse delle *x* partendo da un punto sull'asse delle *y*. Per esempio, in rosso sono mostrati i due percorsi che si potrebbero fare a partire dal punto (0, 4) e che portano ai punti (2, 0) e (–2, 0). L'impossibilità di costruire una inversa per la funzione $f(x) = x^2$ risulta anche analiticamente, perché posto $y = x^2$ si può risolvere rispetto ad *x* solo estraendo la radice quadrata ma allora rimane il problema del segno da attribuire alla radice: bisogna porre $x = \sqrt{y}$ o $x = -\sqrt{y}$? Si può risolvere la questione ignorando il ramo di parabola che giace nel secondo quadrante. In questo caso (considerando cioè solo le *x* positive) la funzione risulta invertibile e la sua inversa è $y = \sqrt{x}$.

Riassumendo, perché una funzione risulti invertibile in un dato intervallo è necessario che su di esso la corrispondenza tra i valori della *x* e della *y* sia *biunivoca*, cioè ad ogni *x* corrisponda una sola *y* e viceversa.

Se tracciamo sullo stesso grafico una funzione e la sua inversa notiamo una particolarità: i due grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e del terzo quadrante (in figura i grafici di $f(x) = x^2$ (in rosso) e della sua inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (in blu) insieme con la bisettrice *y* = *x*.



ATTENZIONE: non si confonda il simbolo $f^{-1}(x)$ con $\dfrac{1}{f(x)}$ che rappresenta tutt'altra cosa che la funzione inversa. In generale, gli esponenti applicati subito dopo il simbolo della funzione non hanno valore algebrico ma simbolico. Allo stesso modo, $f^2(x)$ non vuol dire $f(x)f(x)$ ma $f(f(x))$.

Dopo questa lunga discussione, possiamo dare finalmente la definizione di funzione invertibile e di inversa di una funzione.
DEFINIZIONE: una funzione $f : A \to B$ si dice invertbile quando essa è una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di A e di B. In questo caso, la funzione che associa ad ogni elemento *y* di B l'elemento *x* (unico) di A tale che $f(x) = y$ si chiama *funzione inversa* e si indica con il simbolo $f^{-1}(x)$

Nella lezione precedente abbiamo già incontrato alcune "coppie" di funzioni, una l'inversa dell'altra. Ad esempio, le funzioni potenza sono inverse a coppie (ogni funzione del tipo x^a ha come inversa $x^{\frac{1}{a}}$ – ad esempio, l'inversa di x^3 è $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$). Inoltre la funzione logaritmica e quella esponenziale sono una l'inversa dell'altra (ovviamente se hanno la stessa base!). Infatti, posto ad esempio $y = e^x$ si ha per definizione $x = \ln y$

Da ricordare

- Le definizioni di funzione composta e di funzione inversa
- Quando una funzione è invertibile (corrispondenza biunivoca tra dominio e codominio – analogia grafica)
- Simmetria dei grafici di una funzione e della sua inversa
- Procedura per il calcolo dell'inversa di una funzione

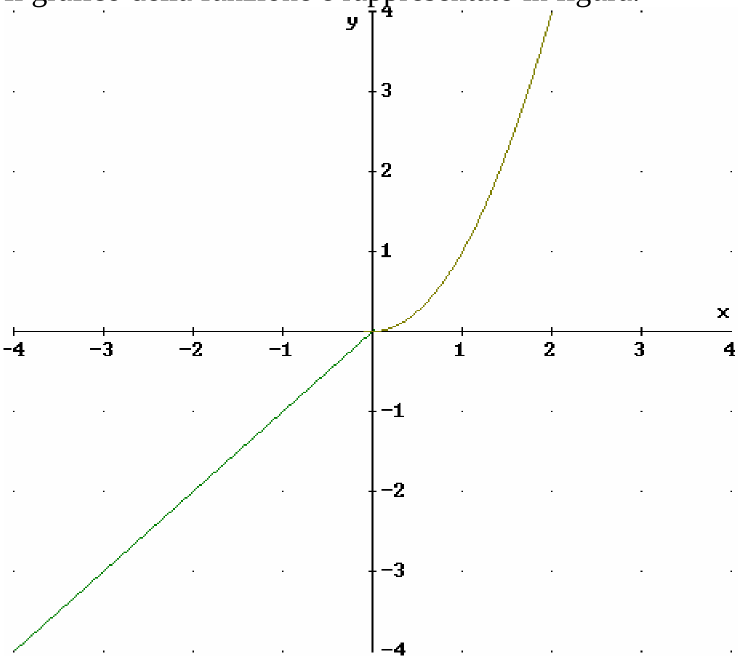
Esercizi

1. Date $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$ scrivere l'espressione analitica di $f(g(x))$ e di $g(f(x))$
2. Scrivere $e^{\sqrt{x}}$ come funzione composta

3. Scrivere le funzioni inverse delle seguenti funzioni:
   a) $y = 2x + 3$
   b) $y = x^2 - 1$
   c) $y = \ln \frac{x}{2}$
   d) $y = \begin{cases} x \text{ per } x \le 0 \\ x^2 \text{ per } x > 0 \end{cases}$

Soluzioni

1. $f(g(x)) = f(2^x) = (2^x)^2 = 2^{2x}$ e $g(f(x)) = g(x^2) = 2^{x^2}$
2. Se $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sqrt{x}$ allora $f(g(x)) = e^{\sqrt{x}}$
3.
   a) $y = 2x + 3$ quindi $x = \dfrac{y-3}{2}$ e allora la funzione inversa è $f(x) = \dfrac{x-3}{2}$
   b) $y = x^2 - 1$ quindi $x^2 = y + 1$. Non si può estrarre la radice quadrata senza introddure ambiguità: decidiamo di limitarci alle sole *x* positive (analogamente al caso della parabola). Poniamo quindi $x = \sqrt{y+1}$ e quindi la funzione inversa è $f(x) = \sqrt{x+1}$
   c) $y = \ln\dfrac{x}{2}$ quindi $\dfrac{x}{2} = e^y$ cioè $x = 2e^y$. La funzione inversa è dunque $f(x) = 2e^x$
   d) Il grafico della funzione è rappresentato in figura.



Poiché per ogni *y* esiste una sola *x* corrispondente, la funzione è invertibile. Per le *x* negative l'inversa coincide con la funzione stessa. Per le *x* positive la funzione è il ramo di parabola $y = x^2$ che ha come inversa $y = \sqrt{x}$. La funzione inversa è quindi $y = \begin{cases} x \text{ per } x \le 0 \\ \sqrt{x} \text{ per } x > 0 \end{cases}$

Lezione 9

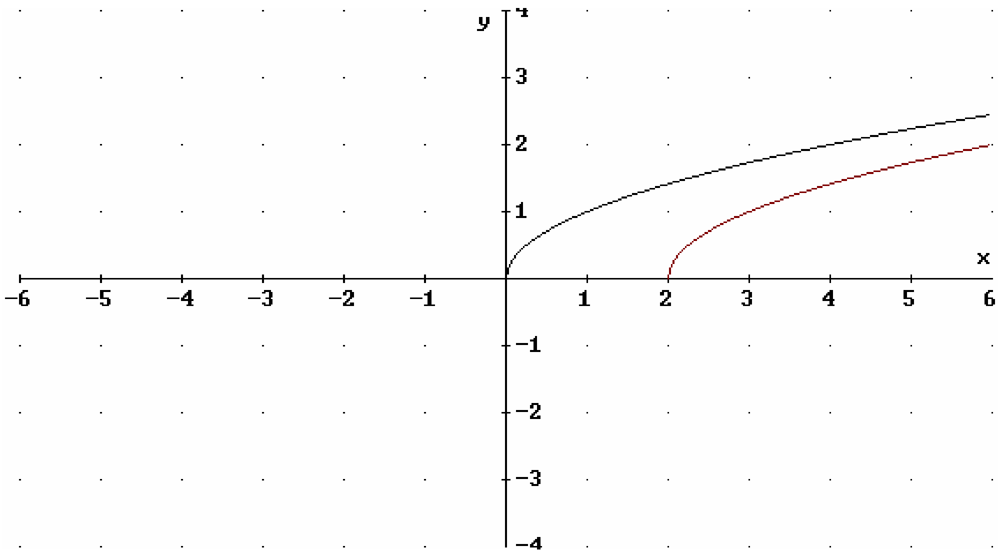
Trasformazioni di funzioni

A partire dalle funzioni elementari si possono costruire alcuni grafici di altre funzioni che non differiscono molto dalle prime. Esaminiamo concretamente alcuni casi immaginando di partire dalla funzione espressa nella forma $y = f(x)$.

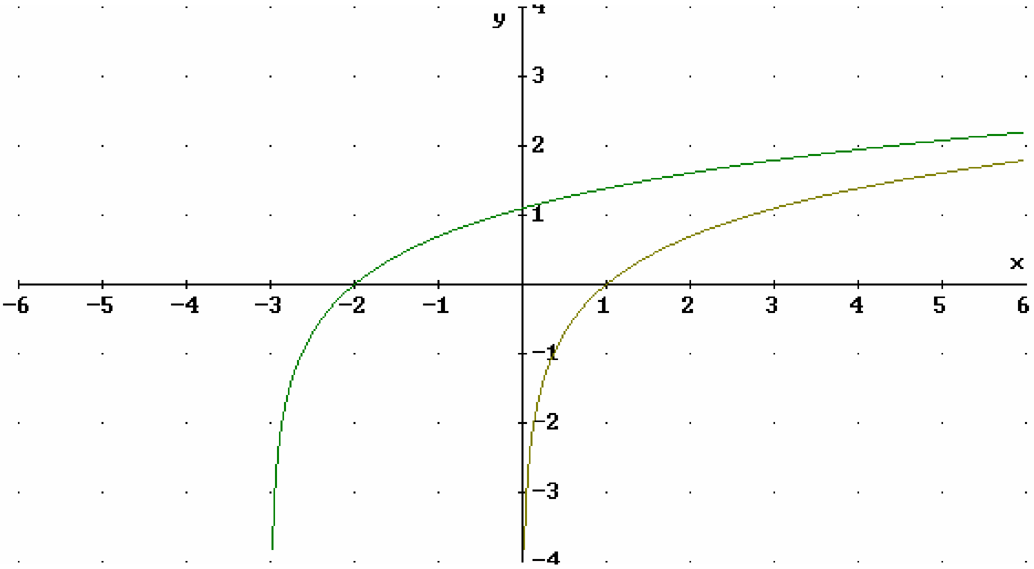
Traslazione orizzontale

REGOLA: Se sostituiamo *x* con $x - c$ nell'espressione di una funzione il grafico risulta traslato *a destra* di una quantità pari a *c*. Se sostituiamo *x* con $x + c$ nell'espressione di una funzione il grafico risulta traslato *a sinistra* di una quantità pari a *c*

ESEMPIO: Il grafico di $y = \sqrt{x-2}$ si può ottenere semplicemente partendo dal grafico di $y = \sqrt{x}$ e traslando il grafico di due unità verso destra. La funzione $y = \sqrt{x-2}$ è quindi definita solo per $x \geq 2$.



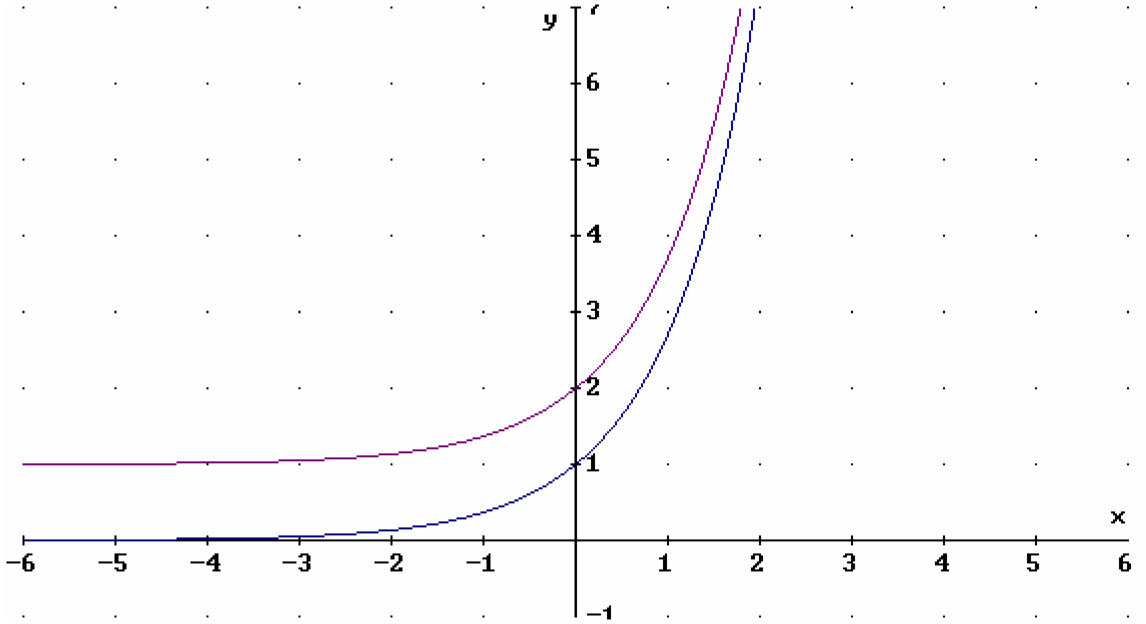
ESEMPIO: Il grafico di $y = \ln(x+3)$ si può ottenere semplicemente partendo dal grafico di $y = \ln x$ e traslando il grafico di tre unità verso sinistra. La funzione $y = \ln(x+3)$ è quindi definita per $x > -3$ ed ha come asintoto verticale la retta $x + 3 = 0$.


y
x
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
3
2
1
−1
−2
−3
−4

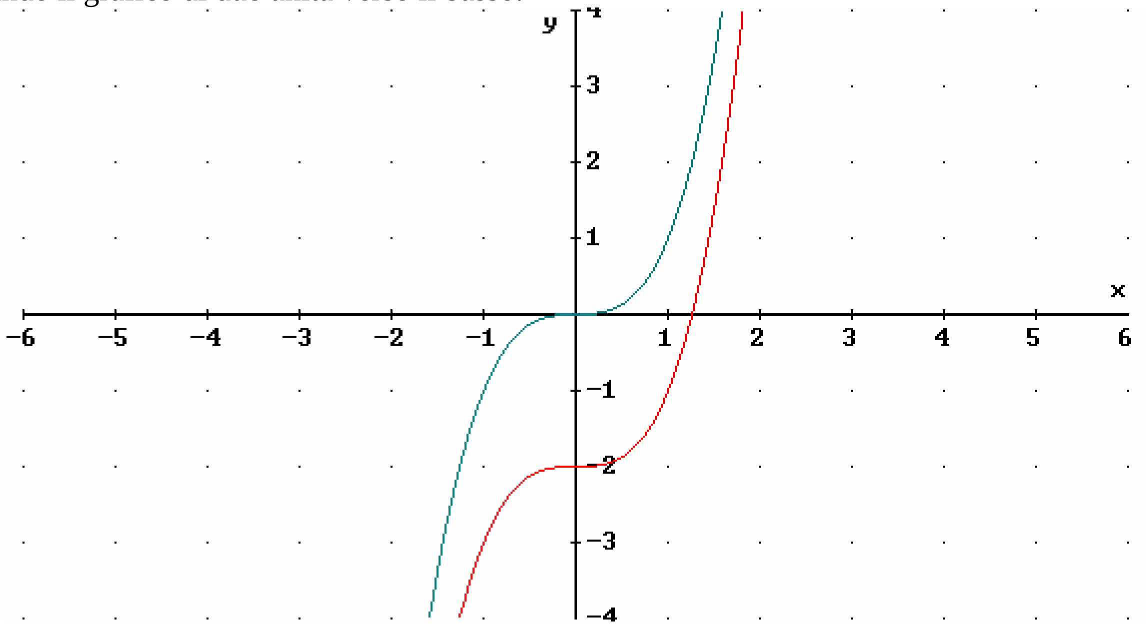
Traslazione verticale

REGOLA: Se sostituiamo y con $y - c$ nell'espressione di una funzione il grafico risulta traslato *in alto* di una quantità pari a *c*. Se sostituiamo y con $y + c$ nell'espressione di una funzione il grafico risulta traslato *in basso* di una quantità pari a *c*

ESEMPIO: Il grafico di $y - 1 = e^x$ (cioè $y = 1 + e^x$) si può ottenere semplicemente partendo dal grafico di $y = e^x$ e traslando il grafico di un'unità verso l'alto. La funzione $y = 1 + e^x$ ha come asintoto orizzontale la retta $y = 1$.



ESEMPIO: Il grafico di $y + 2 = x^3$ si può ottenere semplicemente partendo dal grafico di $y = x^3$ e traslando il grafico di due unità verso il basso.



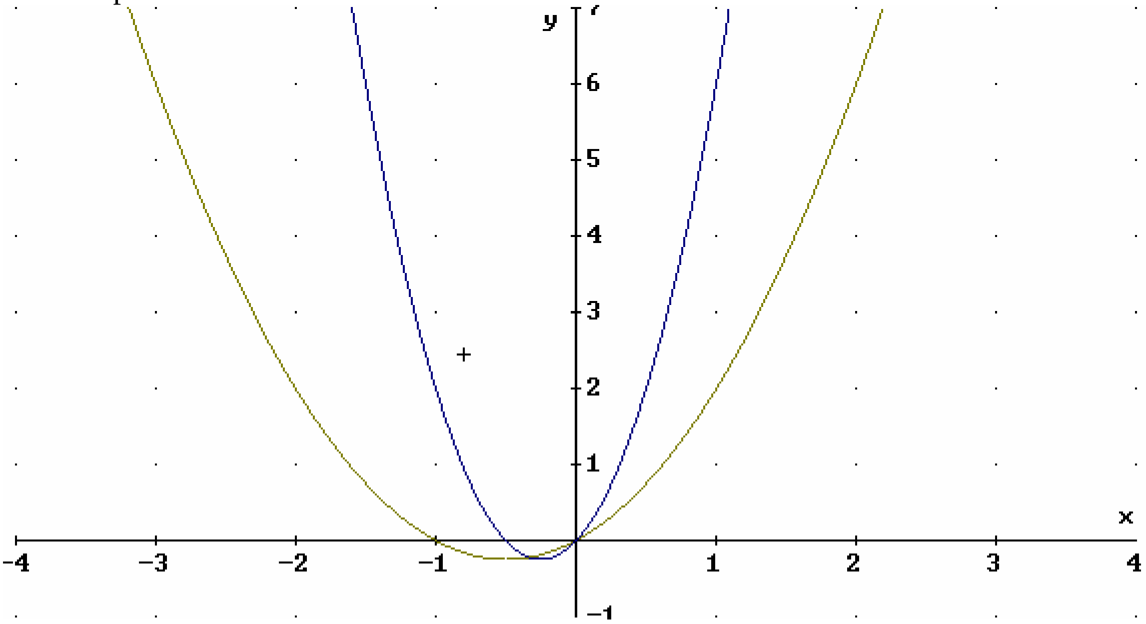
Dilatazione e contrazione orizzontale

REGOLA: Se sostituiamo x con cx ($c > 0$ e ovviamente $c \neq 1$) nell'espressione di una funzione, le distanze orizzontali del grafico rispetto all'asse delle ordinate risultano moltiplicate per $\frac{1}{c}$.

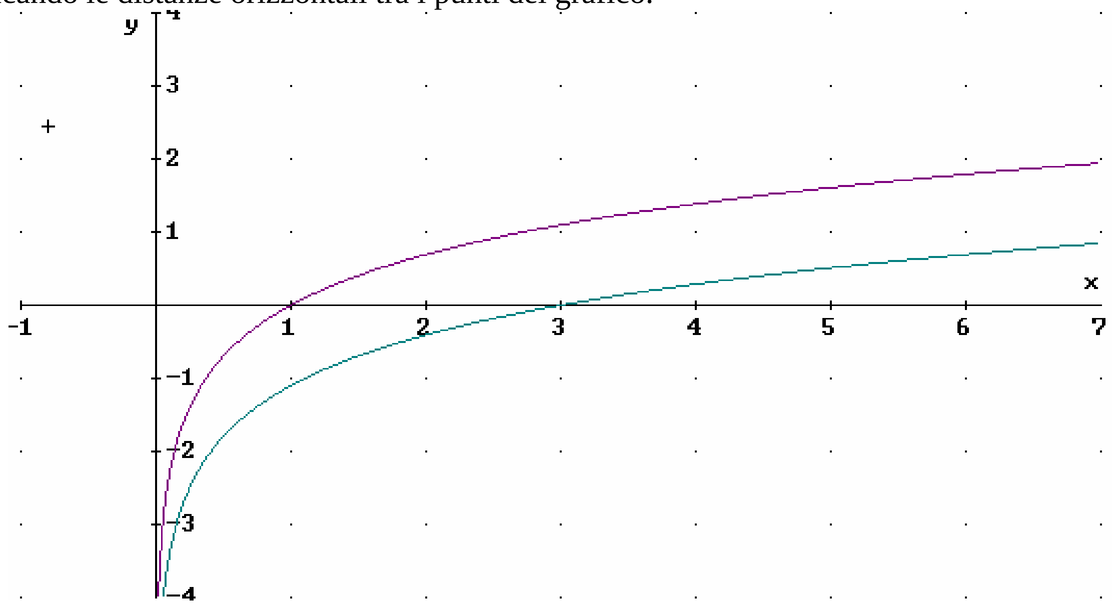
Quindi:

- se $c > 1$ le distanze orizzontali si riducono
- se $c < 1$ le distanze orizzontali aumentano

ESEMPIO: Il grafico di $y = (2x)^2 + 2x$ si può ottenere semplicemente partendo dal grafico di $y = x^2 + x$ e dimezzando le distanze orizzontali tra i punti del grafico. In altre parole, il grafico risulta "compresso" orizzontalmente in modo che le distanze tra i punti si dimezzino. Lo zero rimane al suo posto.



ESEMPIO: Il grafico di $y = \ln\left(\frac{x}{3}\right)$ si può ottenere semplicemente partendo dal grafico di $y = \ln x$ e triplicando le distanze orizzontali tra i punti del grafico.



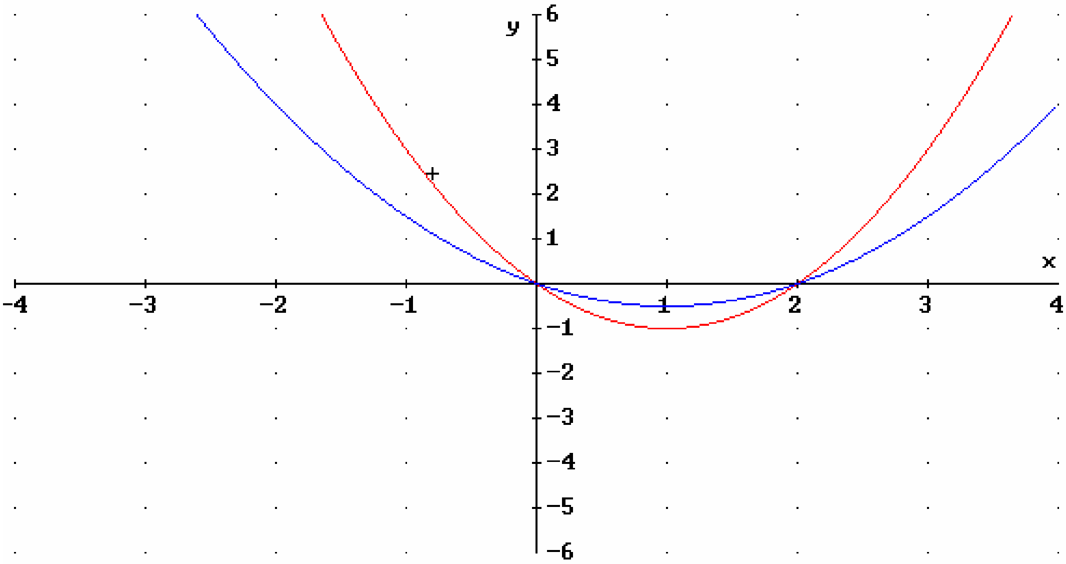
Poiché $\ln\left(\frac{x}{3}\right) = \ln x - \ln 3$, il grafico della funzione si poteva tracciare anche a partire dal grafico di $y = \ln x$ spostandolo verso il basso di $\ln 3$ unità

Dilatazione e contrazione verticale

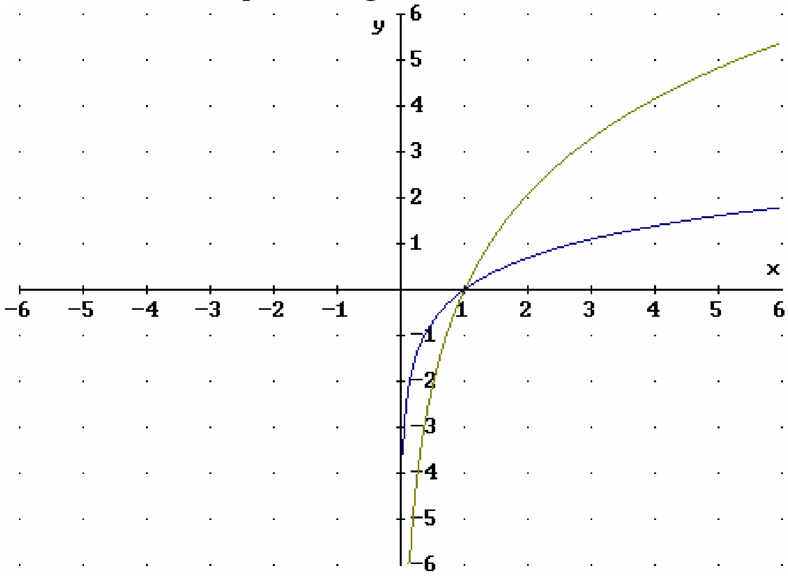
REGOLA: Se sostituiamo y con cy ($c > 0$ e ovviamente $c \neq 1$) nell'espressione di una funzione, le distanze verticali del grafico rispetto all'asse delle ascisse risultano moltiplicate per $\frac{1}{c}$. Quindi:

- se $c > 1$ le distanze verticali si riducono
- se $c < 1$ le distanze verticali aumentano

ESEMPIO: Il grafico di $2y = x^2 - 2x$ si può ottenere semplicemente partendo dal grafico di $y = x^2 - 2x$ e dimezzando le distanze verticali tra i punti del grafico. In altre parole, il grafico risulta "compresso" verticalmente in modo che le distanze tra i punti si dimezzino.



ESEMPIO: Il grafico di $\frac{1}{3}y = \ln(x)$ si può ottenere semplicemente partendo dal grafico di $y = \ln x$ e triplicando le distanze verticali tra i punti del grafico.



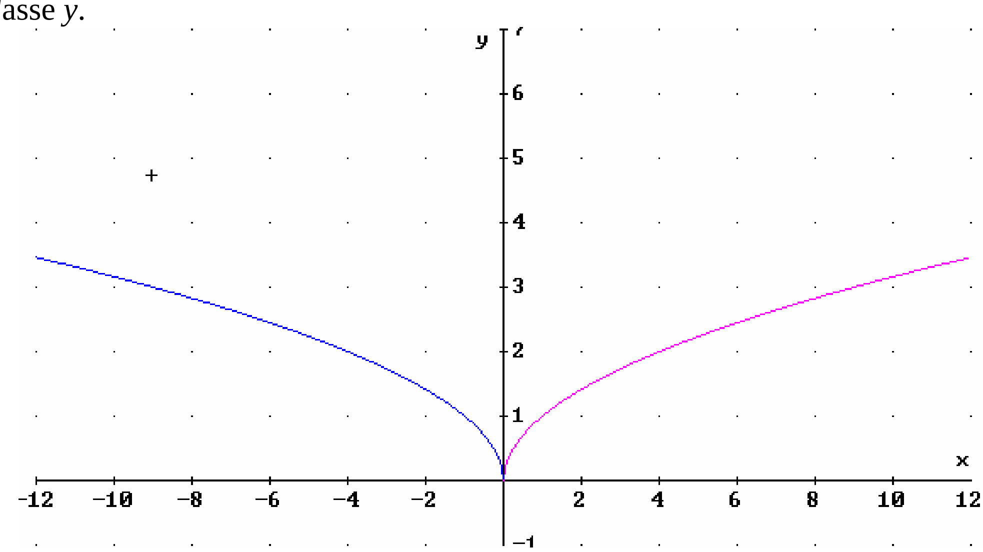
Inversioni

REGOLA: Se sostituiamo x con $-x$ nell'espressione di una funzione, il grafico risulta ribaltato rispetto all'asse *y*. Se sostituiamo y con $-y$, il grafico risulta ribaltato rispetto all'asse *x*.

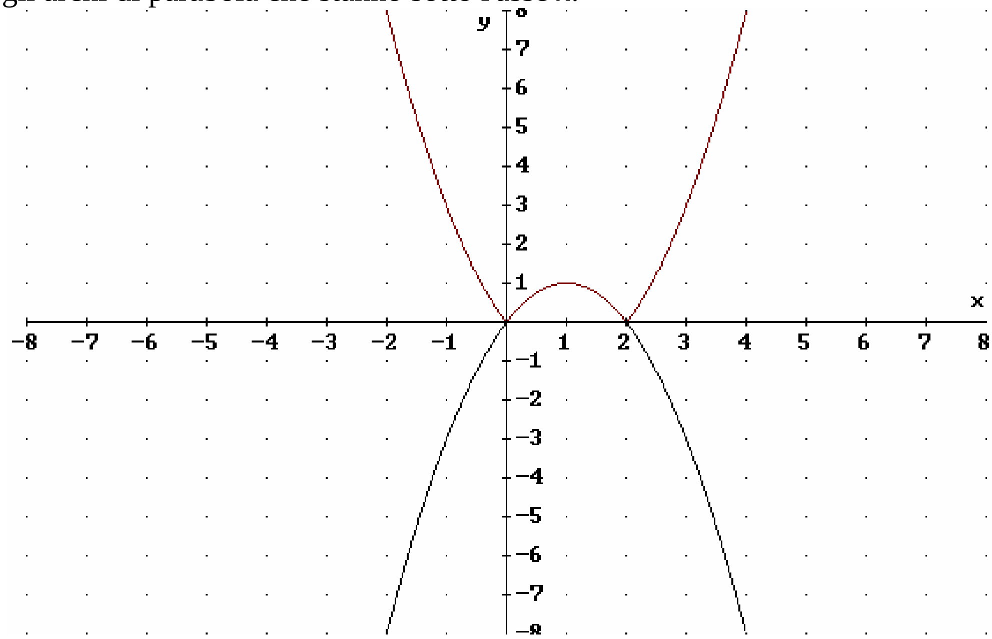
Valore assoluto

REGOLA: Se sostituiamo $f(x)$ con $|f(x)|$ nell'espressione di una funzione, le parti del grafico che sono al di sotto dell'asse delle *x* si ribaltano rispetto all'asse *x*. Tutto il grafico risulta quindi positivo.

ESEMPIO: Il grafico di $y=\sqrt{-x}$ si può ottenere partendo dal grafico di $y=\sqrt{x}$ e ribaltando rispetto all'asse *y*.

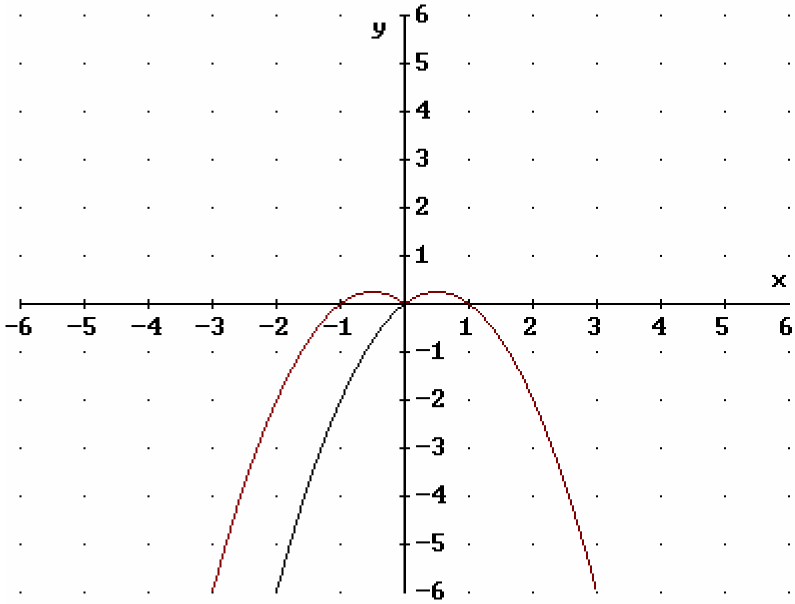


ESEMPIO: Il grafico di $y=|2x-x^2|$ si può ottenere partendo dal grafico di $y=2x-x^2$ e ribaltando gli archi di parabola che stanno sotto l'asse *x*.



REGOLA: Se sostituiamo $f(x)$ con $f(|x|)$ nell'espressione di una funzione, le parti del grafico che sono alla destra dell'asse *y* sono ribaltate sulla sinistra. Si ottiene quindi una funzione pari.

ESEMPIO: il grafico di $y = |x| - |x|^2$ si può ottenere a partire da $y = x - x^2$ ribaltando la porzione di grafico delle *x* positive nel semipiano delle *x* negative.



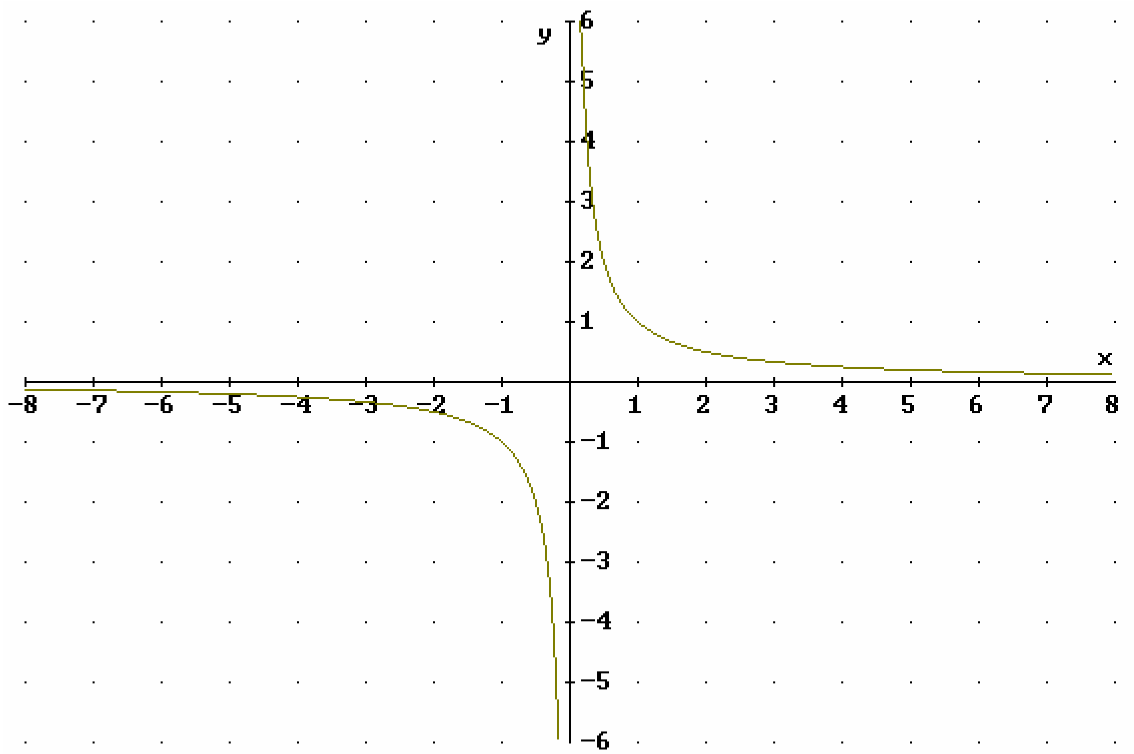
Combinazione di trasformazioni

Combinando le trasformazioni illustrate in questa lezione si possono disegnare i grafici di numerose funzioni e risolvere senza particolari calcoli alcuni problemi. Un esempio particolare è quello della cosiddetta "funzione omografica".

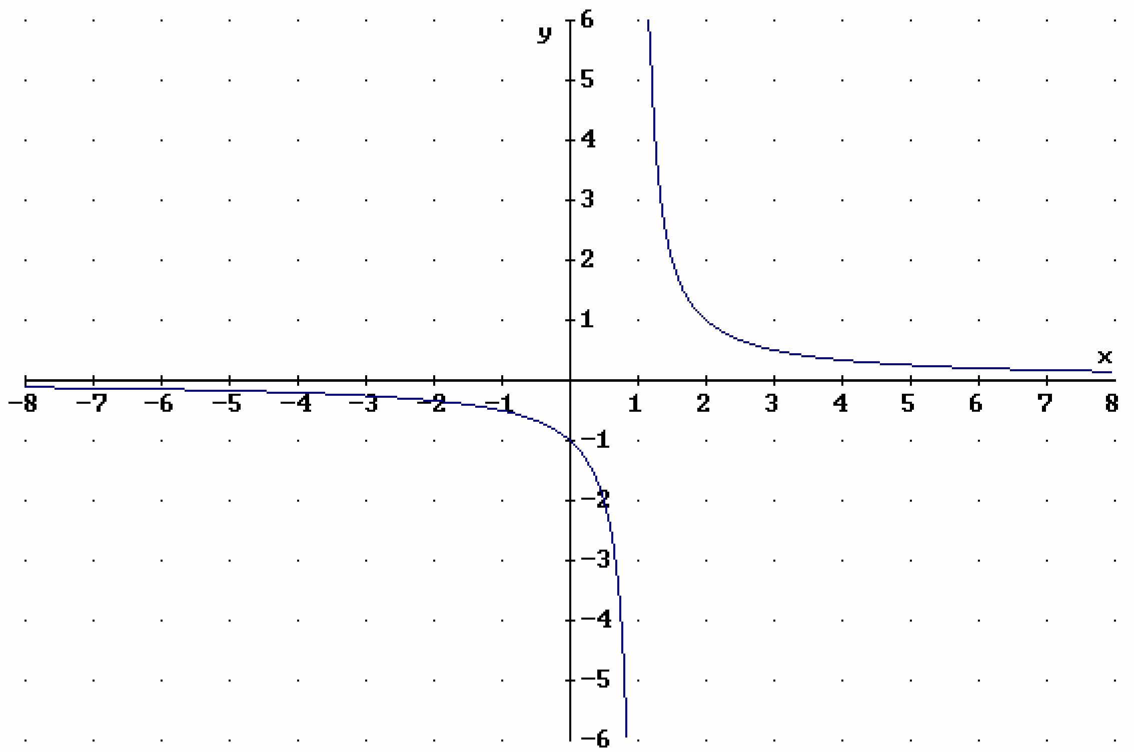
Funzione omografica

Si dice funzione omografica una funzione la cui espressione analitica è $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ dove *a*, *b*, e *c*¸sono numeri reali e $b \neq ac$. La funzione si può scrivere nella forma $y = a + \dfrac{b-ac}{x+c}$ (per verificare basta fare il minimo comune multiplo), nella quale si adatta meglio allo studio attraverso le trasformazioni.

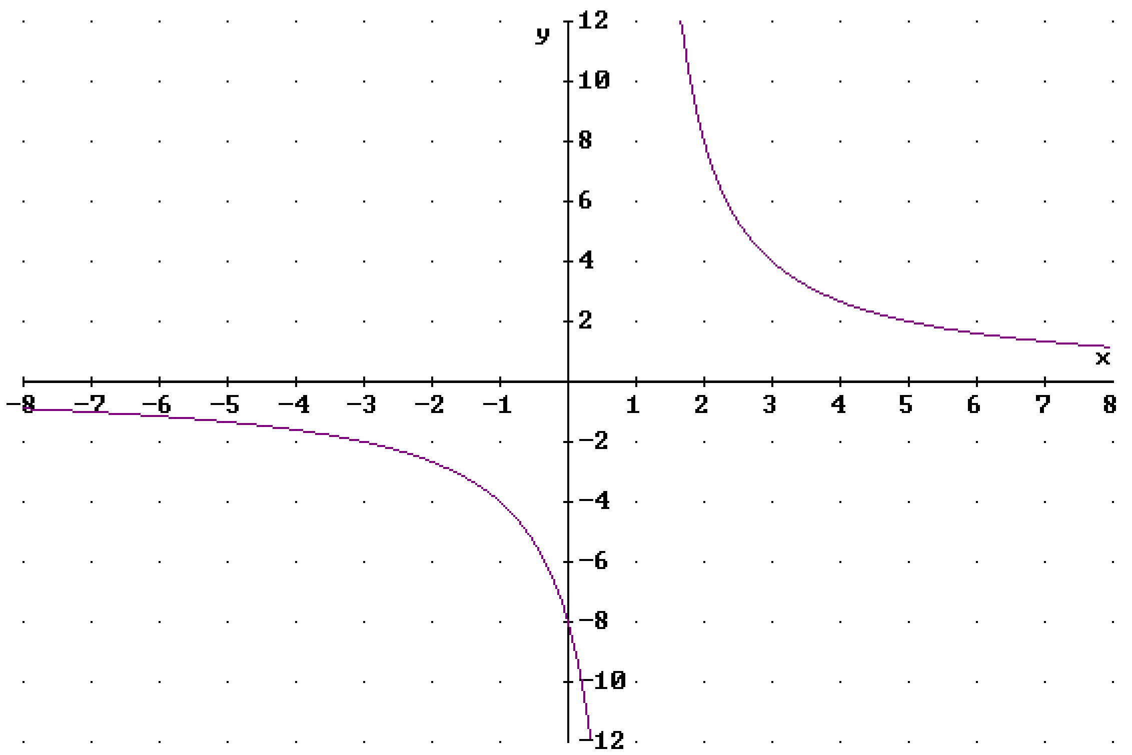
ESEMPIO: $y = \dfrac{3x+5}{x-1}$. Scriviamo la funzione nella forma $y = 3 + \dfrac{8}{x-1}$. Partiamo quindi dal grafico di $y = \dfrac{1}{x}$ che è quello di un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti (o che è lo stesso della funzione di proporzionalità inversa).



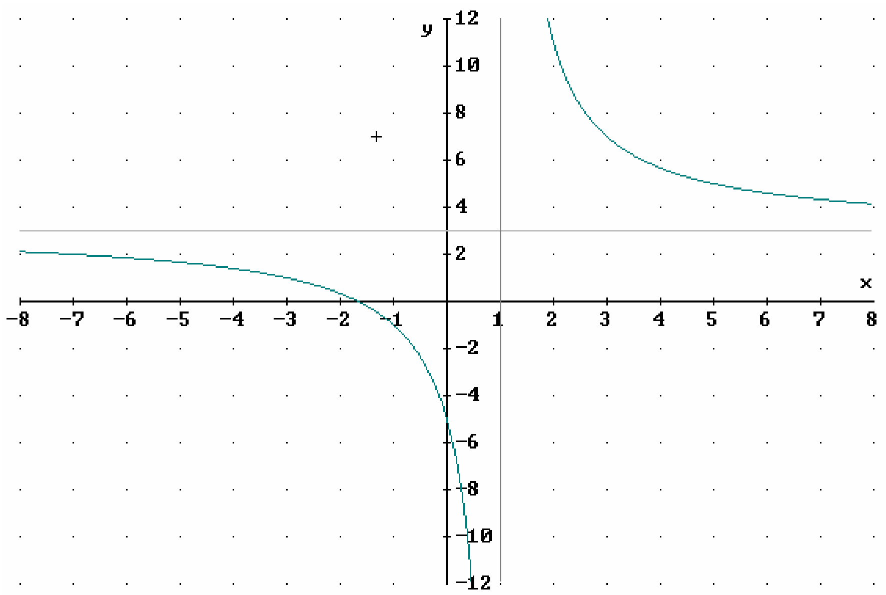
Passiamo al grafico di $y = \dfrac{1}{x-1}$ con una traslazione orizzontale verso destra.



Passiamo al grafico di $y = \dfrac{8}{x-1}$ dilatando verticalmente (moltiplicando per 8 le distanze verticali).



Infine, passiamo al grafico di $y = 3 + \dfrac{8}{x-1}$ traslando verticalmente verso l'alto di 3 unità.



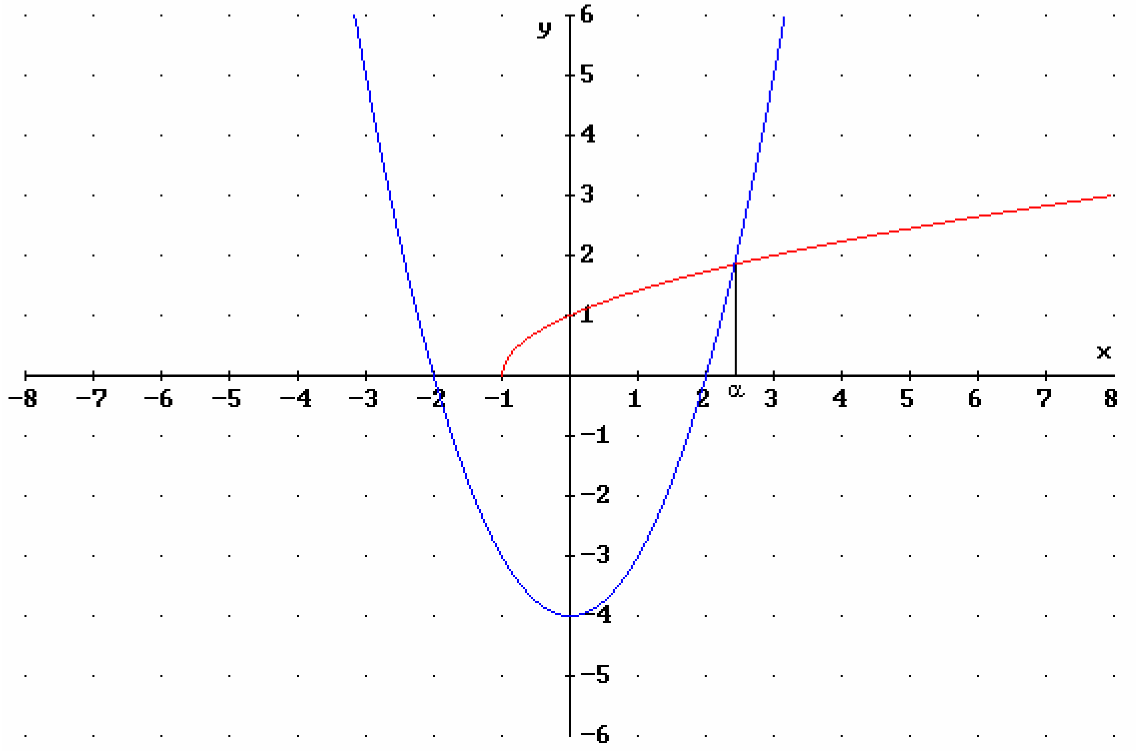
(nel grafico sono stati aggiunte le rette $x = 1$ e $y = 3$ rispettivamente asintoto verticale e orizzontale)

Disequazioni e confronti grafici

Lo studio grafico permette di risolvere rapidamente anche alcune disequazioni altrimenti onerose o addirittura impossibili a svolgersi algebricamente.

REGOLA: Supponiamo di saper tracciare i grafici delle funzioni *f* e *g*. Allora la soluzione della disequazione $f(x) > g(x)$ è data da tutti i punti *x* in cui il grafico di *f* è *sopra* il grafico di *g*. Analogamente, la soluzione della disequazione $f(x) < g(x)$ è data da tutti i punti *x* in cui il grafico di *f* è *sotto* il grafico di *g*.

ESEMPIO: $\sqrt{x+1} < x^2 - 4$. La disequazione non è risolubile algebricamente (elevando al quadrato si arriva ad una disequazione di quarto grado). Siccome essa si presenta nella forma $f(x) > g(x)$ possiamo tracciare i grafici delle due funzioni $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = x^2 - 4$. Si tratta della curva $f(x) = \sqrt{x}$ traslata a sinistra di un'unità e della parabola convessa $g(x) = x^2 - 4$. Riportando il grafico delle due funzioni sullo stesso piano cartesiano si ottiene la seguente figura:



La disequazione è risolta per tutti i valori di *x* maggiori di un certo numero α, ascissa dell'intersezione tra le due curve. In simboli $x > \alpha$

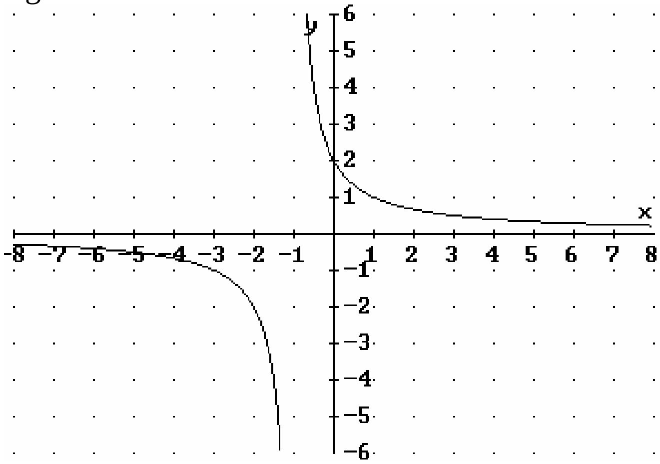
Esercizi

1. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni
   a) $y = \dfrac{2}{x+1}$
   b) $y = \sqrt{2x+1}$
   c) $y = 3e^{-x}$
   d) $y = 3\ln(2x-1)$
2. (5 luglio 2001) Si consideri la funzione $f(x) = 5e^{-x} - 3$ definita nell'intervallo $x \geq 0$.
   a) Tracciare un grafico di *f* nell'intervallo $x \geq 0$
   b) Individuare, sempre nell'intervallo $x \geq 0$, eventuali punti di massimo e di minimo, specificando se si tratta di estremi globali o locali.
3. Risolvere graficamente le seguenti disequazioni
   a) $\ln(x+1) < 2 - x$
   b) $\sqrt{3-x} < 1 + x$
   c) $\ln(x+1) > e^{-x}$
   d) $e^{2x} > 4 - x^2$

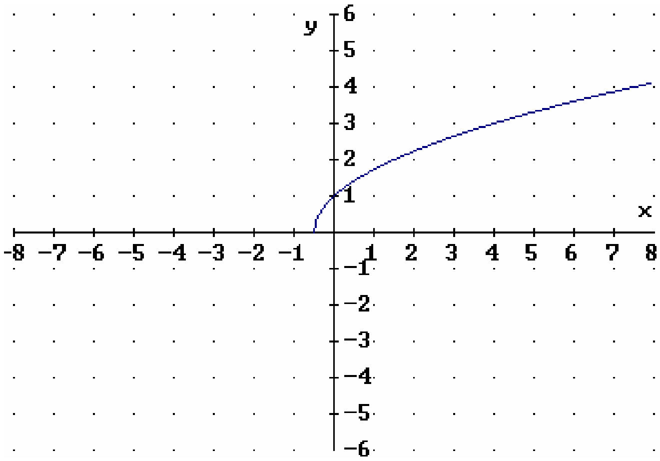
Soluzioni

1. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni

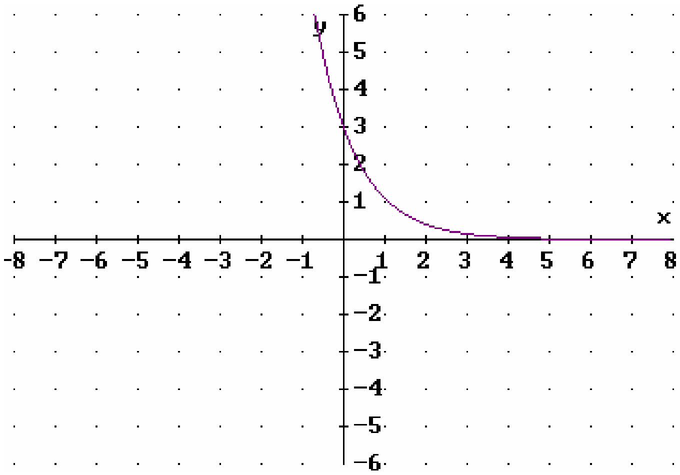
a) $y = \dfrac{2}{x+1}$

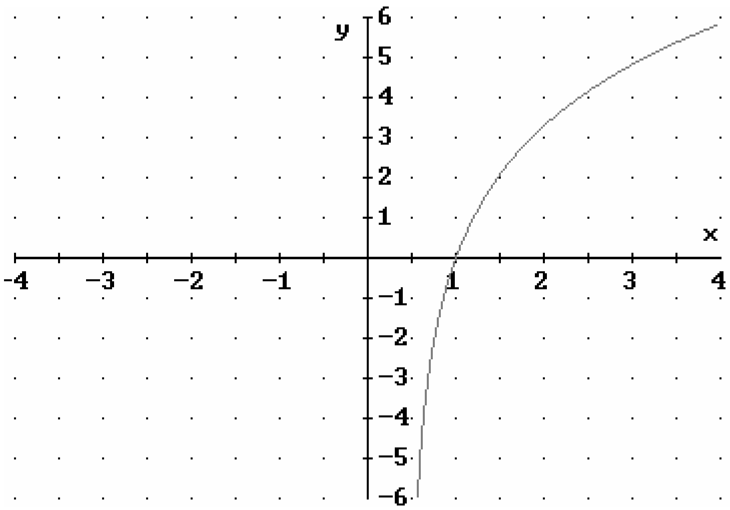


b) $y = \sqrt{2x+1}$



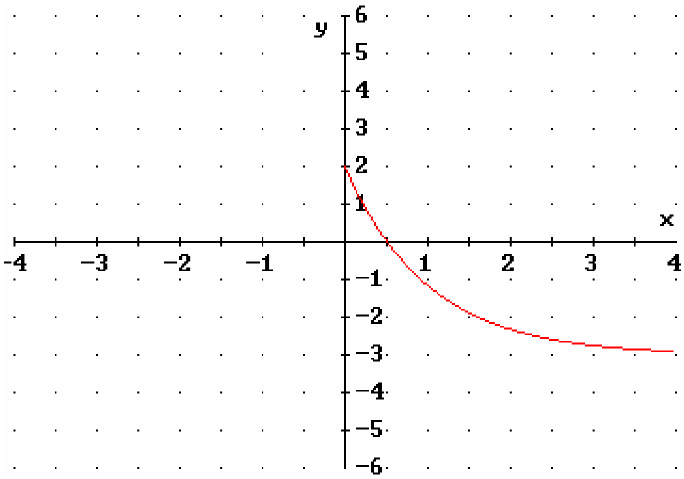
c) $y = 3e^{-x}$





d) $y = 3\ln(2x-1)$

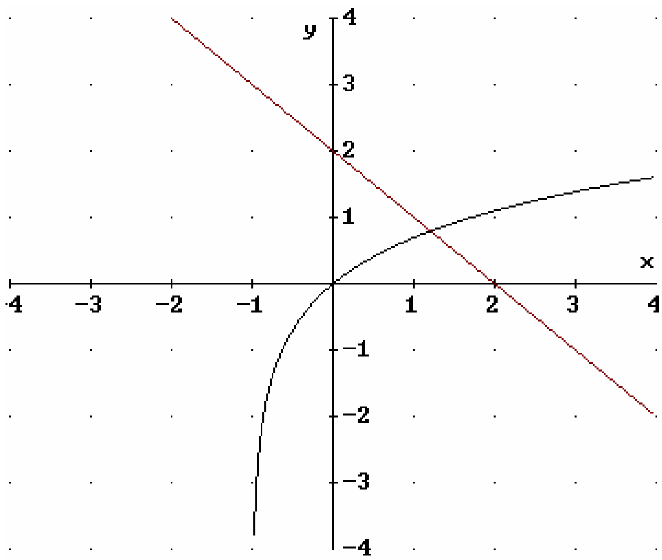
2. Il grafico di $f(x) = 5e^{-x} - 3$ è



e ha come asintoto orizzontale la retta $y = -3$. Pertanto, nel suo insieme di definizione, $x \geq 0$, la funzione ha massimo (valore 2 nel punto di ascissa 0) e non ha minimo. Il massimo è globale.

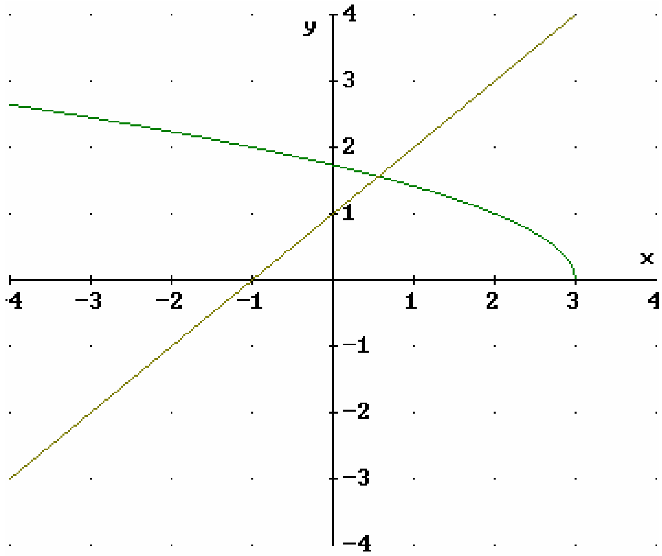
3. Risolvere graficamente le seguenti disequazioni

a) $\ln(x+1) < 2 - x$



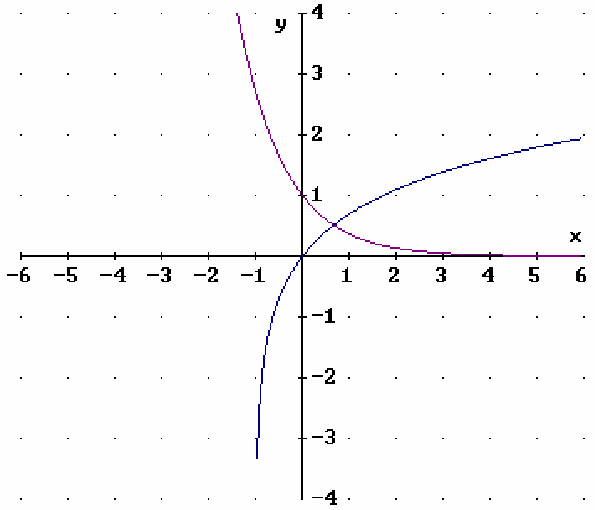
Quindi la soluzione è $-1 < x < \alpha$ dove α è il punto di intersezione delle curve. Si faccia attenzione che il logaritmo non è definito per $x \leq -1$ e quindi la soluzione deve escludere esplicitamente questo intervallo.

b) $\sqrt{3-x} < 1+x$



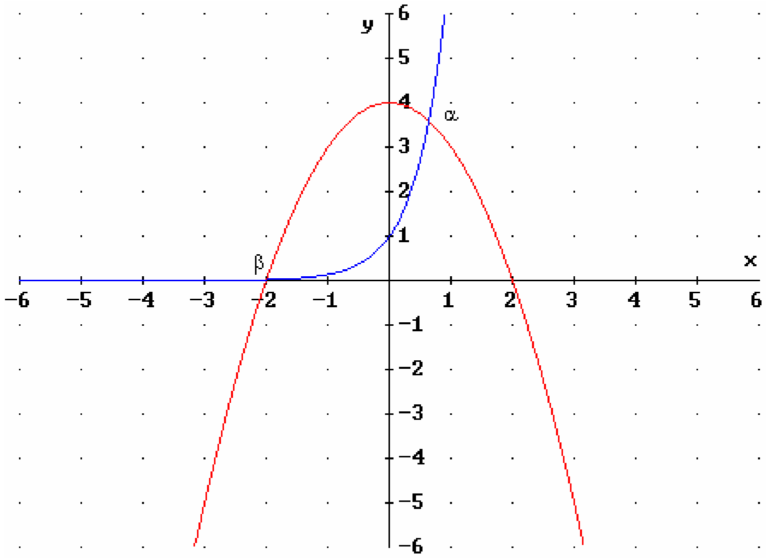
Quindi la soluzione è $\alpha < x \leq 3$ dove α è il punto di intersezione delle curve. Si noti che alla soluzione appartiene anche il punto $x = 3$ in cui *entrambe* le funzioni sono definite.

c) $\ln(x+1) > e^{-x}$



La soluzione è $x > \alpha$ dove α è il punto di intersezione delle curve.

d) $e^{2x} > 4 - x^2$



La soluzione è costituita da due intervalli: $x > \alpha$ dove α è il punto di intersezione delle curve con ascissa positiva e $x > \beta$ dove β è il punto di intersezione delle curve con ascissa negativa.

Lezione 10-11

Matematica finanziaria

La matematica finanziaria si occupa delle applicazioni del calcolo matematico alle situazioni finanziarie. Il problema principale del calcolo finanziario è quello di stabilire un criterio per svolgere calcoli con somme disponibili a scadenze diverse.
Iniziamo con alcune definizioni.

Capitalizzazione

DEFINIZIONE: si dice *capitalizzazione* il trasferimento di somme *in avanti* nel tempo. La somma disponibile al tempo iniziale si dice *capitale* e si indica con la lettera C. La somma disponibile al tempo finale si chiama *montante* e si indica con la lettera M. Il rapporto $f = \frac{M}{C}$ si chiama *fattore di capitalizzazione (o fattore di montante)*.

ESEMPIO: si investono oggi in titoli di stato 10ML di euro per riceverne 11.2ML tra due anni. Si tratta di un'operazione di capitalizzazione dove il capitale è di 10ML, il montante di 11.2ML e il fattore di capitalizzazione di 1,12.

Le relazioni che legano montante e capitale possono essere anche scritte in forma additiva invece che moltiplicativa.

DEFINIZIONE: si dice *interesse* e si indica con la lettera I la differenza tra montante e capitale impiegato: $M = C + I$

L'interesse e il fattore di montante hanno ovviamente un legame (rappresentando in due modi diversi la stessa cosa). Poiché $M = C + I$ e $M = Cf$, uguagliando le espressioni per M si ha $C + I = Cf$, cioè $C(f - 1) = I$ e quindi $f = 1 + \frac{I}{C}$. Si faccia attenzione che mentre *f* è un numero senza unità di misura, l'interesse I rappresenta una somma di denaro e quindi è misurato nelle unità monetarie del caso.

ESEMPIO: nell'esempio precedente, l'interesse I è di 1.2 ML.

L'interesse che viene concesso per un impiego di un capitale dipende da molti fattori. In tutte le situazioni correnti l'interesse dipende però sempre anche dal tempo. Si giunge così alla definizione di tasso di interesse.

DEFINIZIONE: si dice *tasso (annuo) di interesse* e si indica con la lettera *i* l'interesse prodotto da un'unità di capitale per un anno.

Poiché in questo caso $C = 1$ e $t = 1$, si ha $f = 1 + i$ o $i = f - 1$. Dal punto di vista pratico, *i* viene di solito indicato come un numero percentuale.

La parola "annuo" è scritta tra parentesi perché per convenzione quando si parla di "tasso di interesse" si intende tasso annuo di interesse. Nella pratica, però, si utilizzano talvolta anche tassi semestrali, trimestrali, mensili, ecc. cioè riferiti a periodi rispettivamente di un semestre, di un trimestre, di un mese, ecc.

ATTENZIONE: nei calcoli finanziari si faccia sempre attenzione al fatto che il tempo sia misurato nella stessa unità cui si riferisce il tasso di interesse.

Regimi di capitalizzazione

DEFINIZIONE: un *regime di capitalizzazione* è una formula che permette di calcolare il montante di un dato capitale (o, che è lo stesso, l'interesse maturato o il fattore di capitalizzazione). Nella pratica si usano correntemente due regimi di capitalizzazione, la capitalizzazione semplice e la capitalizzazione composta.

Capitalizzazione semplice (C.S.)

Nella C.S. il montante è dato da $M = C(1+it) = C + Cit$. i è il tasso di interesse (infatti ponendo $C = 1$ e $t = 1$ si ha $M = 1 + i$.
L'interesse è Cit mentre il fattore di montante è $f = 1 + it$.

ESEMPIO: Qual è il montante ottenuto investendo un capitale di 8ML per 2 anni, al tasso di interesse del 13% in regime di C:S:? Applicando la relazione precedente si ha

$$M = C(1+it) = 8(1 + 2\cdot 0.13) = 8\cdot 1.26 = 10.08$$

Nella relazione $M = C(1+it)$ sono coinvolte 4 grandezze. Conoscendone 3 si può determinare facilmente la quarta.

ESEMPIO: riferendoci all'esempio iniziale, si vuole calcolare il tasso di interesse annuo e semestrale supponendo che l'investimento sia stato fatto in regime di C.S.. Si ha . $C = 10$, $M = 11.2$ e $t = 2$. Per quanto riguarda il tasso annuo, sostituendo nella relazione $M = C(1+it)$ si ha $11.2 = 10(1+2i)$ da cui $1.12 = 1 + 2i$ cioè $i = 0.06 = 6\%$ .Analogamente, per il tasso semestrale si ha $C = 10$, $M = 11.2$ ma $t = 4$ (2 anni sono 4 semestri). Si ottiene $1.12 = 1 + 4i$ cioè $i = 0.03 = 3\%$.

Capitalizzazione composta (C.C.)

Nella C.C. il montante è dato da $M = C(1+i)^t$. i è ancora il tasso di interesse (infatti ponendo $C = 1$ e $t = 1$ si ha $M = 1 + i$.

OSSERVAZIONE: investendo per un anno in C.C. e in C.S. i montanti ottenuti sono uguali.

La C.C. può essere pensata come la ripetuta applicazione della C.S. Si immagini di investire il capitale *C* per *n* anni in questo modo. Alla fine di ogni anno, si ritira il montante e lo si reinveste alle stesse condizioni. Dopo il primo anno il montante è $M = C(1+i)$. Questo è anche il capitale iniziale del secondo periodo. Alla fine del secondo periodo ho un montante dato da $M = [C(1+i)](1+i) = C(1+i)^2$. Questo è il capitale iniziale del terzo periodo. Alla fine del terzo periodo il montante è $M = \left[C(1+i)^2\right](1+i) = C(1+i)^3$ e così via.

ESEMPIO: Qual è il montante ottenuto investendo un capitale di 8ML per 2 anni, al tasso di interesse del 13% in regime di C.C:? Si ha

$$M = C(1+i)^2 = 8(1+0.13)^2 = 10.2152$$

OSSERVAZIONE: per quanto sopra scritto non è casuale il fatto che a parità di condizioni l'investimento in C.C. sia più redditizio del corrispondente investimento in C.S. In C.C., infatti, durante il secondo anno è stato impiegato un capitale superiore a 8ML, precisamente il montante del primo periodo, cioè $8(1+0.13)=9.04\,\text{ML}$

ESEMPIO: riferendoci all'esempio iniziale, si vuole calcolare il tasso di interesse annuo e semestrale supponendo che l'investimento sia stato fatto in regime di C.C.. Per quanto riguarda il tasso annuo si ha . $C=10$, $M=11.2$ e $t=2$. Sostituendo nella relazione $M=C(1+i)^t$ si ha $11.2=10(1+i)^2$ cioè $1.12=(1+i)^2$. Estraendo la radice quadrata di ambo i membri si ha $1+i=1{,}05830052$ da cui $i=0.0583\ldots\approx 5.83\%$. Il tasso di interesse è minore del corrispondente tasso in C.S. e questo non deve sorprendere. Poiché la C.C. è più redditizia della C.S., per avere nello stesso periodo uno stesso montante, basta un tasso di interesse inferiore.
Per l'interesse semestrale si ha $C=10$, $M=11.2$ e $t=4$, da cui $11.2=10(1+i)^4$. Estraendo la radice quarta si ha $1+i=1{,}02873734$ cioè $i=0.0287\ldots\approx 2.87\%$.

Tassi periodali

Esiste un legame tra i tassi di interesse relativi a diversi periodi di tempo. Questo legame, però, dipende dalla legge di capitalizzazione.

DEFINIZIONE: si dice *tasso periodale* il tasso di interesse relativo ad un dato periodo diverso dall'anno. Si indica con i_m dove *m* è il numero di periodi compresi in un anno. Ad esempio, i_2 indica il tasso semestrale, i_3 indica il tasso quadrimestrale, i_{12} indica il tasso mensile

DEFINIZIONE: si dice *tasso annuo convertibile m volte l'anno periodale* il numero ottenuto moltiplicando il tasso periodale per il numero *m* di periodi. Ad esempio, $2i_2$ indica il tasso annuo convertibile semestralmente e $12i_{12}$ indica il tasso annuo convertibile mensilmente.

Come si è visto negli esempi precedenti i rapporti tra i tassi periodici sono facilmente calcolabili quando si lavora in C.S. Il tasso periodale è semplicemente la frazione corrispondente del tasso annuale; così nell'esempio se il tasso annuale è del 6% il tasso semestrale è del 3%.
In C.C. la situazione è diversa. Per l'osservazione precedente, poiché la C.C. è più redditizia della C.S, in C.C. i tassi periodali sono sempre inferiori al rapporto tra il tasso annuo equivalente e il numero di periodi. Così, nell'esempio precedente, il tasso semestrale è inferiore alla metà del tasso annuale.

In C.C. la relazione che lega il tasso periodale i_m al tasso annuo i è l'equazione $1+i=(1+i_m)^m$ dove *m* è il numero di periodi.

Attualizzazione

L'attualizzazione è il processo inverso a quello della capitalizzazione.

DEFINIZIONE: si dice *attualizzazione* il trasferimento di somme *indietro* nel tempo. La somma disponibile al tempo finale si dice *valore nominale* e si indica con la lettera S. La somma disponibile al tempo iniziale si chiama *valore attuale* e si indica con la lettera A. Il rapporto $\phi=\dfrac{A}{S}$ si chiama *fattore di attualizzazione (o fattore di sconto)*.

ESEMPIO: una cambiale a scadenza tra un anno del valore di 10ML viene comperata oggi per 9.1ML. Si tratta di un'operazione di attualizzazione con valore nominale 10ML, valore attuale 9.1ML e fattore di sconto uguale a 0.91.

Le relazioni che legano valore nominale e valore attuale possono essere anche scritte in forma additiva invece che moltiplicativa.

DEFINIZIONE: si dice *sconto* e si indica con la lettera D la differenza tra valore nominale e valore attuale: $D = S - A$

Lo sconto e il fattore di attualizzazione hanno un legame (rappresentando in due modi diversi la stessa cosa). Poiché $A = S - D$ e $A = S\phi$, uguagliando le espressioni per A si ha $S - D = S\phi$, cioè $D = S(1-\phi)$ e quindi $\phi = 1 - \frac{D}{S}$. Si faccia attenzione che mentre è ϕ un numero senza unità di misura, lo sconto D rappresenta una somma di denaro e quindi è misurato nelle unità monetarie del caso.

ESEMPIO: nell'esempio precedente, lo sconto è di 0.9 ML.

OSSERVAZIONE: se si analizza la stessa operazione finanziaria da due punti di vista opposti quella che da uno è vista come capitalizzazione dall'altro è vista come attualizzazione. In questo caso, i due fattori di montante e di attualizzazione devono necessariamente essere legati. Poiché possiamo immaginare di investire il capitale C e poi di attualizzare il montante ottenuto per ottenere di nuovo C, deve sussistere la relazione $(Cf)\phi = C$ da cui la semplice relazione $f\phi = 1$. Due fattori tali che il loro prodotto sia 1 si dicono *coniugati*.

DEFINIZIONE: si dice *tasso (annuo) di sconto* e si indica con la lettera *d* lo sconto che si dà per un'unità di capitale disponibile tra un anno.

Dal punto di vista pratico, *d* viene di solito indicato come un numero percentuale.

Come per il tasso di interesse, se non si indica esplicitamente un periodo, il tasso di sconto va inteso come tasso annuo.

Regimi di attualizzazione

Studieremo tre regimi di attualizzazione. I primi due sono i corrispondenti dei regimi di capitalizzazione C.S. e C.C. Tra i tassi di interesse e di sconto, valgono le seguenti relazioni: $d = \frac{i}{1+i}$ e $i = \frac{d}{1-d}$ che permettono di calcolare uno conoscendo l'altro.

Sconto razionale (corrispondente alla Capitalizzazione semplice)

Nel regime di sconto razionale, il valore nominale e il valore attuale sono legati dalla relazione $S = A(1+it)$. Il fattore di attualizzazione è quindi $\frac{1}{1+it}$. Lo sconto è

$$S - A = S - \frac{S}{1+it} = S\left(1 - \frac{1}{1+it}\right) = S\frac{it}{1+it}.$$

ESEMPIO: Qual è il valore attuale di una cambiale del valore di 8ML scadente tra 2 anni, al tasso di interesse del 13% in regime di sconto razionale? Conviene utilizzare direttamente la legge di C.S.: partendo dalla relazione $S = A(1+it)$ si ha $8 = A(1+0.13\cdot 2)$ da cui $A = \dfrac{8}{(1+0.13\cdot 2)} = 6{,}349206$. Si osservi che in questo caso al tasso di interesse del 13% corrisponde un tasso di sconto del 11.50%

Sconto composto (corrispondente alla capitalizzazione composta)

Nel regime di sconto composto valore nominale e valore attuale sono legati dalla relazione $S = A(1+i)^t$. Il fattore di attualizzazione è $\dfrac{1}{(1+i)^t}$.

Sconto commerciale

A questo regime *non* corrisponde un regime di capitalizzazione effettivamente utilizzato. Nel regime di sconto commerciale valore nominale e valore attuale sono legati dalla relazione $A = S - Std$ cioè lo sconto Std è direttamente proporzionale al valore nominale e al tempo.

ESEMPIO: Qual è il valore attuale di una cambiale del valore di 8ML scadente tra 2 anni, al tasso di sconto del 13% in regime di sconto commerciale? Dalla relazione $A = S - Std$ si ricava $A = 8 - 8\cdot 2\cdot 0.13 = 5.92$ ML.

La legge di sconto commerciale viene di solito applicata solo quando il tempo *t* è sufficientemente piccolo. Al crescere di *t*, infatti, il valore attuale decresce continuamente e per $t = \dfrac{1}{d}$ addirittura diviene 0, cosa che non è accettabile dal punto di vista delle applicazioni.

Esercizi

1. Completare la seguente tabella (in regime di C.C.)

C	M	*I*	*t*
10		12%	3 anni
	12	15%	2 anni e 5 mesi
5	10	7%	
5	10		5 anni
2		4% semestrale	2 anni e mezzo

2. A quale tasso annuale corrisponde il tasso mensile del 0.5% in C.C? e in C.S?
3. A quale tasso trimestrale corrisponde il tasso annuo dell'8% in C.C? e in C.S?
4. Il capitale di 7ML è impiegato per 5 anni. È più conveniente il tasso annuo del 6% o il tasso semestrale del 3%?

Soluzioni

1. Completare la seguente tabella (in regime di C.C.)

	C	*M*	*i*	*t*
1	10	14.04928	12%	3 anni
2	8.560414	12	15%	2 anni e 5 mesi
3	5	10	7%	10.24476
4	5	10	14.86%	5 anni
5	2	2.433305	4% semestrale	2 anni e mezzo

NOTE: Per la seconda riga, si noti che un periodo di 2 anni e 5 mesi equivale, in anni, a $2+\frac{5}{12}=\frac{29}{12}$ di anno.

Per la terza riga, si deve ricavare il tempo che si trova ad esponente. La relazione che si scrive è $10=5(1.07)^t$ cioè $2=(1.07)^t$. Calcolando il logaritmo di entrambi i membri e utilizzando le proprietà si ha $\ln 2 = t \ln 1.07$ da cui $t=\frac{\ln 2}{\ln 1.07}=10.24476$ cioè un tempo superiore a 10 anni.

Per la quarta riga si deve calcolare la radice quinta di 2 che è $\sqrt[5]{2}=1.1486983$. Il tasso *i* è quindi circa il 14.86%

Per la quinta riga, il tasso e il tempo devono essere espressi nella stessa unità. Il tempo quindi è di 5 periodi (2 anni e mezzo = 5 semestri).

2. Il tasso mensile del 0.5% corrisponde al 6.16% in C.C e al 6% in C.S?
3. Il tasso annuo dell'8% corrisponde al tasso trimestrale dell'1.94% in C.C e del 2% in C.S?
4. È più conveniente il tasso semestrale. In regime di C.S. i montanti sono uguali, mentre in regime di C.C. il montante è superiore.

Lezione 12-13

Successioni

DEFINIZIONE: una successione è una funzione da N a R, cioè una funzione avente per dominio l'insieme dei numeri naturali.

Poiché il dominio è l'insieme N, una successione si indica di solito con la scrittura a_n dove l'indice *n* indica esplicitamente l'elemento del dominio di cui a_n è immagine. Una successione viene di solito definita esplicitamente indicando per ogni *n* il corrispondente numero reale. a_n è di solito chiamato "termine generale" della successione.

ATTENZIONE: ove non sia esplicitamente indicato, l'insieme N contiene lo 0.

ESEMPI:

1. $a_n = \frac{1}{n}$ con $n \geq 1$. I primi termini sono: $a_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$.
2. $a_n = \begin{cases} n & \text{per n pari} \\ -n & \text{per n dispari} \end{cases}$. I primi termini sono:. $a_n = \{0, -1, 2, -3, 4, -5, \dots\}$
3. $a_n = \frac{n+1}{n+2}$. I primi termini sono: $a_n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \dots\right\}$.
4. $a_n = n^2$. I primi termini sono: $a_n = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$.

Elenchiamo ora le proprietà delle successioni.

DEFINIZIONE: una successione a_n si dice limitata superiormente se esiste un valore *k* per cui $a_n \leq k$ per tutti i valori di *n*.

Degli esempi precedenti, le successioni 1 e 3 sono limitate superiormente dal numero 1

DEFINIZIONE: una successione a_n si dice limitata inferiormente se esiste un valore *k* per cui $a_n \geq k$ per tutti i valori di *n*.

Degli esempi precedenti, le successioni 1, 3 e 4 sono limitate inferiormente dal numero 0

DEFINIZIONE: una successione a_n limitata inferiormente e superiormente si dice limitata.

DEFINIZIONE: una successione a_n si dice crescente $a_{n+1} > a_n$ per tutti i valori di *n*.

DEFINIZIONE: una successione a_n si dice decrescente $a_{n+1} < a_n$ per tutti i valori di *n*.

Analogamente a quanto succede per le funzioni, si danno le definizioni di crescita e descrescita in senso forte e debole.

Una successione crescente o decrescente si dice monotòna.

Le successioni si possono rappresentare graficamente in un piano cartesiano in cui sull'asse *x* rappresentiamo i numeri naturali e sull'asse *y* i valori della successione. Ovviamente, il grafico è costituito da un insieme di punti isolati. Per le successioni valgono proprietà grafiche analoghe a quelle delle funzioni.

DEFINIZIONE: se una successione gode di una certa proprietà da un certo indice *n* in poi, si dice che è tale proprietà è goduta *definitivamente*.

ATTENZIONE: di norma, nelle successioni interessano solo le proprietà possedute da un certo posto in poi, cioè definitivamente.

Limiti di successioni

DEFINIZIONE: una successione a_n si dice convergente ad un limite A se per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ la distanza di a_n da A è *definitivamente* inferiore a ε. Si può scrivere questa proprietà in due modi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A,$$

oppure

$$a_n \to A \text{ per } n \to +\infty$$

DEFINIZIONE: una successione convergente a 0 si dice "*un infinitesimo*".

La nozione di convergenza è di fatto una nozione di distanza. Le successioni convergenti sono quelle che "si avvicinano" ad un certo valore, il limite della successione. Per una successione convergente scrivere $a_n \to A$ equivale a scrivere $a_n - A \to 0$ e $|a_n - A| \to 0$

ATTENZIONE: la nozione di limite non implica necessariamente che i valori di a_n (alcuni o tutti da un certo posto in poi) siano uguali al limite *A*. Per esempio, una successione può avere limite 3 e tutti i termini diversi da 3.

ESEMPIO: La successione 1 dell'esempio precedente converge a 0 (è quindi infinitesima) e la successione 3 converge a 1.

PROPRIETÀ: una successione convergente è limitata. Il viceversa non è vero (cioè una successione limitata non è necessariamente convergente).

Infatti, se la successione converge da un certo posto in poi i punti sono "vicini" al valore limite. Il viceversa non è vero: si pensi alla successione $a_n = \begin{cases} 1 & \text{per n pari} \\ -1 & \text{per n dispari} \end{cases}$. I termini della successione sono alternativamente 1 e –1. La successione è ovviamente limitata (sia superiormente sia inferiormente) ma non converge perché i valori di a_n non si avvicinano a nessun unico valore.

Tornando all'esempio, notiamo che le successioni 2 e 4 hanno un comportamento simile: in entrambe il valore di a_n cresce indefinitamente (cioè oltre ogni limite prefissato). Questa idea intuitiva viene resa rigorosa dalla seguente definizione.

DEFINIZIONE: una successione a_n si dice divergente a $+\infty$ (rispettivamente $-\infty$) se per ogni numero reale $M > 0$, a_n è *definitivamente* maggiore di M (rispettivamente minore di –M). Si può scrivere questa proprietà in due modi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \text{, (risp. } \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \text{)}$$

oppure

$$a_n \to +\infty \text{ (risp. } a_n \to -\infty \text{) per } n \to +\infty$$

Con questa definizione la successione 4 risulta divergente a $+\infty$, mentre la successione 2 continua a non poter essere classificata, anche se, a meno del segno, il suo carattere è chiaro. Si dà quindi la seguente definizione.

DEFINIZIONE: una successione a_n si dice divergente all'infinito se per ogni numero reale $M > 0$, $|a_n|$ è *definitivamente* maggiore di M. Si può scrivere questa proprietà in due modi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$$

oppure

$$a_n \to \infty \text{ per } n \to +\infty$$

La successione 2 è quindi divergente all'infinito. Le successioni divergenti all'infinito si allontanano indefinitamente dall'origine. Se l'infinito ha segno si allontanano in una certa direzione. Altrimenti la direzione non è specificata (e possono essere entrambe).

DEFINIZIONE: una successione a_n divergente si chiama "*un infinito*".

Rimane il caso delle successioni come la successione $a_n = \begin{cases} 1 & \text{per n pari} \\ -1 & \text{per n dispari} \end{cases}$. Per questi casi si dà la definizione di successione irregolare.

DEFINIZIONE: una successione a_n che non converge né divergente si dice *irregolare*.

OSSERVAZIONE: Le definizioni di convergenza si possono in qualche caso specificare meglio. Per esempio, nel caso della successione 1, convergente a 0, si può osservare che il termine generale a_n si avvicina a 0 da valori che sono maggiori di 0. Questo fatto si indica con la scrittura $a_n \to 0^+$ (dove il segno + in alto non ha valore di segno ma solo di simbolo: esso indica, appunto, che il limite è raggiunto da valori superiori a 0). Analogamente, quando il termine generale si avvicina al limite da valori inferiori al limite si usa la scrittura $a_n \to A^+$. Per esempio, la successione 3 converge a 1 da valori minori di 1 e quindi in questo caso si potrà scrivere $a_n \to 1^-$.

OSSERVAZIONE: poiché nel seguito saremo interessati soprattutto al carattere di una successione (convergente, divergente o irregolare) ed eventualmente al suo limite, converremo di considerare una successione come sempre definita "da un certo posto in poi", cioè per un indice *n* abbastanza grande. Per esempio, la successione $\sqrt{n-100}$ è una successione che non è definita per i valori interi minori di 100. Tuttavia, il suo carattere è ben definito essendo determinato *non* dai primi 100 termini ma dagli infiniti termini che seguono (e lo stesso sarebbe se al posto di 100 ci fosse un qualsiasi numero).

Enunciamo ora qualche importante (anche se banale) risultato.

TEOREMA: il limite di una successione se esiste è unico.

In altre parole, se una successione converge ad un certo valore non può contemporaneamente convergere ad un altro valore. Una spiegazione intuitiva è data dalla considerazione che, se la successione converge ad una certo limite *A* vuol dire che da un certo posto in poi tutti i termini sono abbastanza vicini ad *A*. Ma allora non possono essere contemporaneamente vicini ad un altro numero *B* diverso da *A*.

TEOREMA: una successione monotòna è regolare, cioè o converge o diverge.

Anche questo risultato è abbastanza intuitivo. Si consideri per esempio una successione crescente. Essa non può oscillare e quindi ha due sole possibilità: o i suoi valori si avvicinano ad un valore limite finito o divergono a $+\infty$.

TEOREMA: una successione monotòna e limitata è convergente.

Una successione limitata non è divergente e quindi deve necessariamente essere convergente.

Successioni per ricorrenza

Un altro modo di presentare una successione è il seguente. Si assegna un valore iniziale e una regola per calcolare il termine successivo della successione. Ad esempio, assegniamo $a_0 = 3$ e $a_{n+1} = 2a_n + 1$. La seconda espressione indica che l'n+1-esimo termine della successione è dato dal doppio dell'n-esimo aumentato di 1. In altre parole, un generico termine è il doppio del precedente aumentato di 1. Allora, i primi termini della successione proposta sono 3, 7, 15, 31, 63, …

Quando si descrive una successione in questo modo, la successione si dice definita "per ricorrenza".

Questo modo di definire una successione è altrettanto valido del precedente e in alcuni casi è più utile per ricavare alcune informazioni. Le due scritture (quella generale e quella per ricorrenza) sono strutturalmente diverse e può succedere che si riesca a scrivere una successione per ricorrenza senza riuscire a scriverla in forma generale (o viceversa).

In alcuni casi, però, una successione ammette entrambe le forme. Per esempio, per la successione precedente, ci si accorge che essa ha anche la semplice espressione generale $a_n = 2^{n+2} - 1$. Vedremo che questo è anche il caso della successione geometrica.

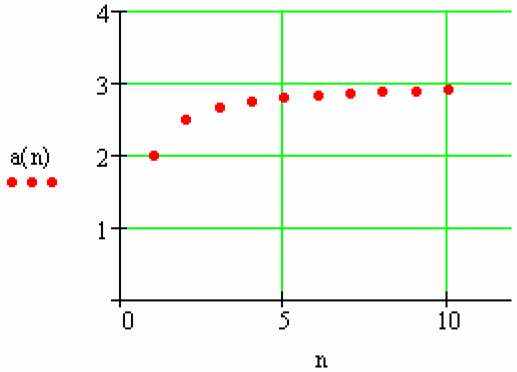
Un esempio economico

Siano *n* gli anni trascorsi dall'impiego di un certo capitale C al tasso *i* in capitalizzazione composta. Allora il montante dopo *n* anni è $M_n = C(1+i)^n$. Per la definizione stessa di legge di capitalizzazione composta, il montante dopo l'anno successivo è uguale al montante dell'anno precedente moltiplicato per il fattore di capitalizzazione $1+i$, quindi $M_{n+1} = M_n(1+i)$. Questa espressione dà il valore di M_{n+1} in funzione del valore di M_n e definisce quindi una successione per ricorrenza.

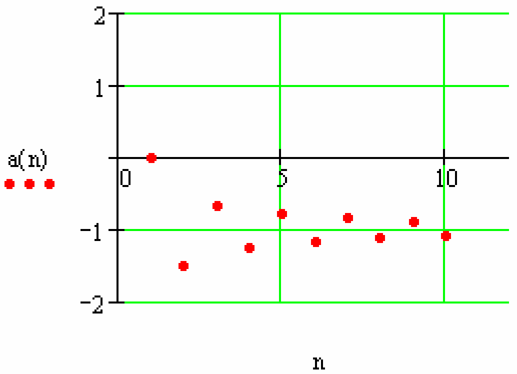
Esercizi

1. Delle seguenti successioni, determinare il carattere e le eventuali proprietà. Per ognuna di esse scrivere i primi 4 termini.
   a) $a_n = n^3$
   b) $a_n = \dfrac{1}{n + n^2}$
   c) $a_n = (-2)^n$
   d) $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
   e) $a_n = \sqrt{n+2}$
   f) $a_n = \begin{cases} 1000 \text{ per } n < 2000 \\ \dfrac{1}{n} \text{ per } n \geq 2000 \end{cases}$
2. Scrivere almeno un esempio di successione
   a) crescente,
   b) non crescente,
   c) decrescente,
   d) limitata superiormente,
   e) limitata inferiormente,
   f) limitata, convergente a 2,
   g) divergente a $-\infty$,
   h) irregolare.

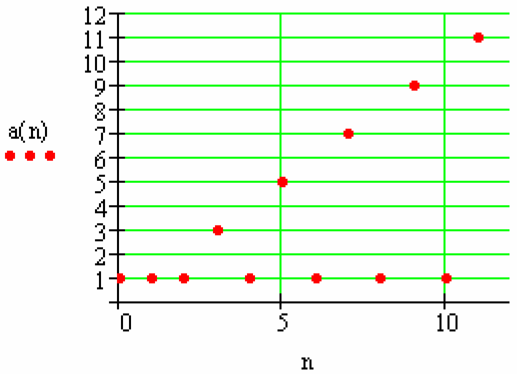
3. Rappresentare in formula (se possibile) la situazione descritta nei grafici seguenti:



a)



b)



c)

4. Rappresentare graficamente le seguenti relazioni algebriche:
   a) $a_n \to 2$
   b) $a_n \to 4^-$
   c) $a_n \to -3^+$
   d) $a_n \to -5^-$

Da ricordare

Tutte le definizioni di questa lezione sono importanti . È fondamentale la nozione di limite di una successione ed è importante saper legare le notazioni in formula con il loro corrispettivo grafico.

Soluzioni

1.

a) $a_n = n^3 = \{0,1,8,27,\ldots\}$ limitata inf.; monotona crescente in senso stretto; divergente a $+\infty$

b) $a_n = \dfrac{1}{n+n^2} = \left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{12},\dfrac{1}{20},\ldots\right\}$ limit., monotona decresc. in senso stretto, convergente a 0

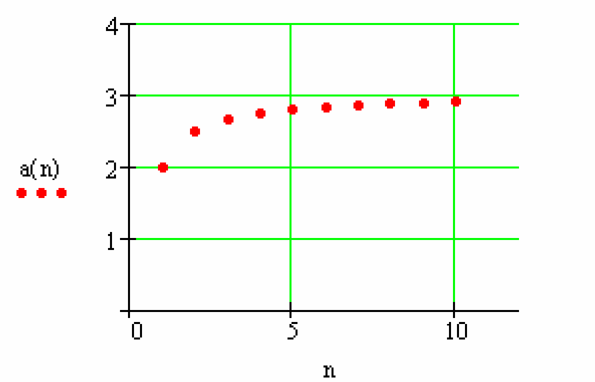
c) $a_n = (-2)^n = \{1,-2,4,-8,\ldots\}$ irregolare, divergente a ∞

d) $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \left\{1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{27},\ldots\right\}$ limitata, monotona decrescente in senso stretto, converg. a 0

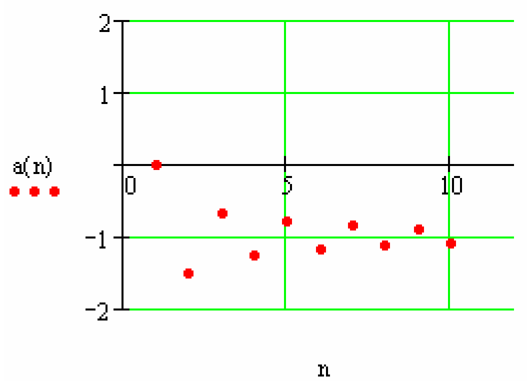
e) $a_n = \sqrt{n+2} = \{\sqrt{2},\sqrt{3},2,\sqrt{5},\ldots\}$ limitata inf.; divergente a $+\infty$

f) $a_n = \begin{cases} 1000 \text{ per } n < 2000 \\ \dfrac{1}{n} \text{ per } n \geq 2000 \end{cases} = \{1000,1000,1000,1000,\ldots\}$ limitata, monotona non crescente (definitivamente decrescente), convergente a 0. Si osservi che il comportamento della successione non è determinato dai primi 2000 termini tutti uguali a 1000.

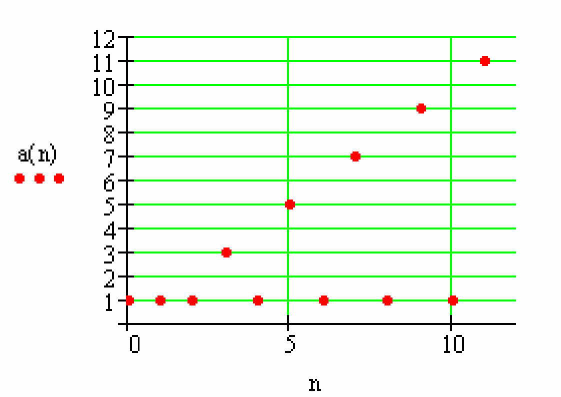
3. Rappresentare in formula la situazione descritta nei grafici seguenti:



a) è descritta da $\lim a_n = 3^-$

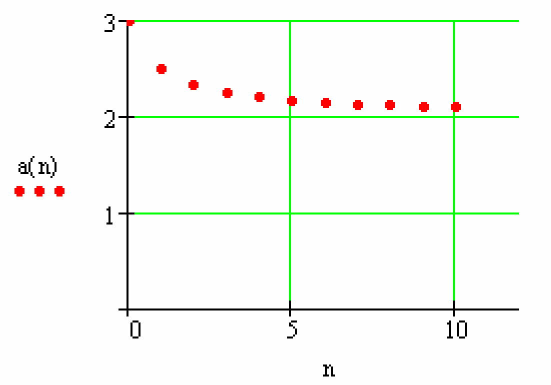


b) è descritta da $\lim a_n = -1$

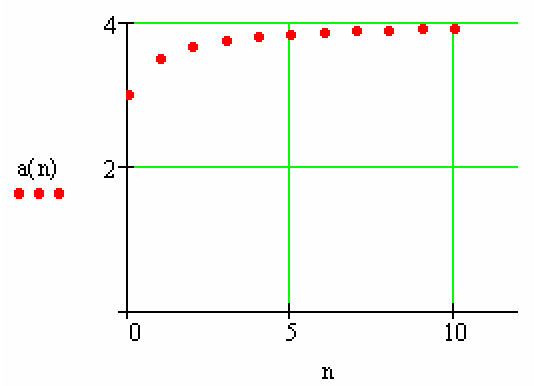


c) non è una successione regolare.

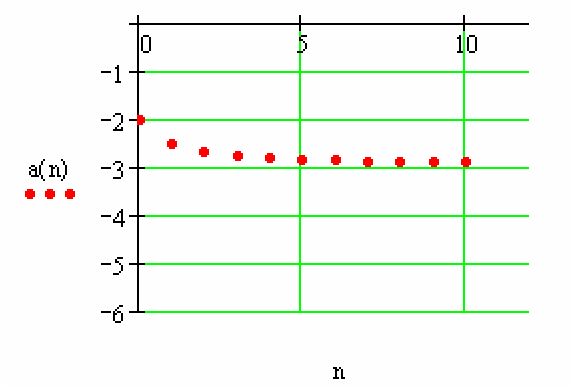
4. Rappresentare graficamente le seguenti relazioni algebriche:



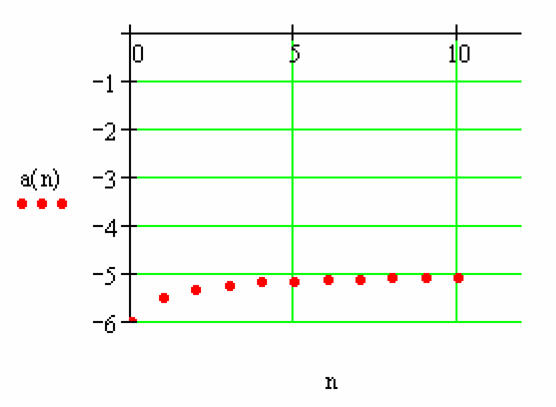
a) $a_n \to 2$



b) $a_n \to 4^-$



c) $a_n \to -3^+$



d) $a_n \to -5^-$

Lezione 14-15

Successione geometrica

Un caso particolare di successione è dato dalla cosiddetta "successione geometrica".

DEFINIZIONE: si chiama successione geometrica una successione a_n in cui il rapporto tra un termine e quello che lo precede è costante. Tale rapporto viene indicato di solito con la lettera q ed è chiamato *ragione*. La forma più generale di una successione geometrica è quindi $a_n = a_0 q^n$, dove a_0 è il primo elemento. La definizione per ricorrenza di una successione geometrica è, dato a_0, $a_{n+1} = a_n \cdot q$

ESEMPIO: un esempio importante di successione geometrica è fornito dalla quantità M_n, montante dopo *n* anni in capitalizzazione composta di un certo capitale *C*. Infatti, tale montante è dato da $M_n = C(1+i)^n$ ed è quindi una successione geometrica di ragione $1+i$ il cui primo termine è *C*.

OSSERVAZIONE: in una successione geometrica, il tasso di variazione percentuale è costante ed uguale a $q-1$. Infatti, il tasso di variazione percentuale è dato dal rapporto tra la variazione del termine (cioè la differenza tra a_{n+1} e a_n) e il valore di a_n. Tale valore è

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n} = \frac{a_0 q^{n+1} - a_0 q^n}{a_0 q^n} = \frac{a_0 q^n (q-1)}{a_0 q^n} = q-1$$

Il comportamento della successione geometrica dipende dal valore di *q*. Esaminiamo separatamente i vari casi.

- $q > 1$. La successione è divergente. Al crescere dell'esponente, il valore assoluto aumenta indefinitamente.
- $q = 1$. La successione è costante: ogni termine è uguale al precedente. La successione è (banalmente) convergente.
- $0 < q < 1$. Al crescere dell'esponente, q^n tende a 0. Quindi la successione convergente a 0.
- $q = 0$. La successione è costante: ogni termine è uguale a 0. La successione è (banalmente) convergente a 0.
- $-1 < q < 0$. Al crescere dell'esponente, q^n tende a 0. Il segno negativo della base fa sì che la successione sia a segni alternati. In ogni caso, la successione converge a 0.
- $q = -1$. Ogni termine è l'opposto del precedente. La successione è quindi irregolare.
- $q < -1$. La successione è a segni alternati e in valore assoluto aumenta indefinitamente. Si tratta quindi di una successione divergente a ∞

Il numero *e*

Di una particolare successione, interessa il limite. Si tratta della successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Al crescere di *n*, la base diminuisce avvicinandosi a 1, mentre l'esponente aumenta. Si può dimostrare che il limite di questa successione esiste e vale un certo numero (non razionale) che in forma decimale è circa 2.718281…. A tale numero è stato assegnato come simbolo la lettera *e* minuscola. Il numero *e* è anche la base dei logaritmi naturali.

La successione $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ compare naturalmente in un semplice ragionamento di matematica finanziaria.
Si consideri l'investimento di un'unità di capitale (ad esempio 1 lira) per un periodo (ad esempio 1 anno) in capitalizzazione semplice. Il montante risultante è di $1+i$ unità di capitale. Supponiamo ora di ritirare il capitale investito dopo 1 semestre e di reinvestirlo alle stesse condizioni immediatamente. Il montante ritirato risulta $1+\frac{i}{2}$ (il periodo è mezzo anno). Per il secondo semestre, il capitale investito risulta quindi $1+\frac{i}{2}$ e, investendo per un altro semestre, il montante finale risulta alla fine $\left(1+\frac{i}{2}\right)^2$ (il capitale $1+\frac{i}{2}$ moltiplicato per $1+\frac{i}{2}$). $\left(1+\frac{i}{2}\right)^2 = 1+i+\frac{i^2}{4}$ e quindi l'investimento in queste condizioni è più redditizio del precedente (il che è ovvio se si pensa che gli interessi sono stati prima ritirati e poi reinvestiti).
Naturalmente, il montante finale sarebbe potuto essere maggiore se avessimo disinvestito e reinvestito il capitale 3 volte l'anno. In questo caso, dopo il primo quadrimestre avremmo ritirato $1+\frac{i}{3}$ che, reinvestiti per il secondo quadrimestre avrebbero dato un montante di $\left(1+\frac{i}{3}\right)^2$ che reinvestiti a loro volta per il terzo quadrimestre avrebbero fruttato alla fine il montante di $\left(1+\frac{i}{3}\right)^3$ che è uguale a $\left(1+\frac{i}{3}\right)^3 = 1+i+\frac{i^2}{3}+\frac{i^3}{27}$ che è ancora maggiore del precedente.
Da questi due esempi si vede che se *n* è il numero di volte che si svolge l'operazione, il montante finale di una lira è $\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$.
Che cosa sarebbe successo se l'operazione che abbiamo descritto si fosse ripetuta ogni mese, ogni giorno o addirittura ogni istante? In termini matematici, che cosa sarebbe successo al tendere di n all'infinito?

DEFINIZIONE: Tale operazione si dice di "*capitalizzazione continua*" al tasso *istantaneo* i.

La risposta è legata al limite che definisce il numero *e*. Una lira investita in capitalizzazione continua al tasso istantaneo *i*, produce dopo un anno un montante di e^i lire. Per esempio, se il tasso di interesse fosse del 5%, il montante di 1 lira in capitalizzazione continua sarebbe di $e^{0.05} = 1.122\ldots$ lire. Se l'impiego, invece che essere annuale, durasse per *t* anni, il montante sarebbe di e^{it} lire.

Operazioni con i limiti

Per il calcolo dei limiti di una successione è utile tenere presente alcuni semplici risultati.

TEOREMA: date due successioni convergenti $a_n \to a$ e $b_n \to b$ la successione delle loro somme converge alla somma dei limiti, cioè $a_n + b_n \to a + b$. Analogamente per le differenze.
TEOREMA: data una successione convergente $a_n \to a$ e una successione divergente $b_n \to \pm\infty$ la successione delle loro somme diverge, cioè $a_n + b_n \to \pm\infty$ allo stesso infinito a cui diverge b_n.

I problemi sorgono quando entrambe le successioni sono divergenti. In tal caso possono verificarsi tutti i comportamenti (convergenza o divergenza). In qualche caso la situazione è semplice, in altri meno. In sintesi si può dire che

- se $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$ allora $a_n + b_n \to +\infty$
- se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to -\infty$ allora $a_n + b_n \to -\infty$
- se $a_n \to -\infty$ e $b_n \to +\infty$ oppure $a_n \to +\infty$ e $b_n \to -\infty$ non si può dire nulla senza analizzare nello specifico la situazione. Si parla in questo caso della *forma indeterminata* $\infty - \infty$

ESEMPI:

- se $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ e $b_n = -3 - \frac{1}{n^2}$ allora $a_n \to 2^+$ e $b_n \to -3^-$. Pertanto la successione $2 + \frac{1}{n} + \left(-3 - \frac{1}{n^2}\right)$ tende a -1
- se $a_n = n^2$ e $b_n = -1 + \frac{1}{n^2}$ allora $a_n \to +\infty$ e $b_n \to -1$. Pertanto la successione $n^2 + \left(-1 + \frac{1}{n^2}\right)$ tende a $+\infty$
- se $a_n = n^2$ e $b_n = -n$ allora $a_n \to +\infty$ e $b_n \to -\infty$. Della successione $n^2 - n$ non si può dire nulla senza un'ulteriore analisi. Poiché $n^2 - n = n(n-1)$ il termine generale si può scrivere come un prodotto di due fattori entrambi tendenti a $+\infty$, la successione prodotto tende a $+\infty$ (si veda il teorema seguente).
- se $a_n = n^2$ e $b_n = -n^2 + \frac{1}{n}$ allora $a_n \to +\infty$ e $b_n \to -\infty$. Della successione $n^2 - n^2 + \frac{1}{n}$ non si può dire nulla senza un'ulteriore analisi. Poiché $n^2 - n^2 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ il termine generale tende a 0.

ATTENZIONE: è un errore ragionare come segue. "*Se una successione diverge a + infinito e l'altra a – infinito, allora + infinito – infinito = 0, e quindi la somma delle successioni tende a 0*". L'errore sta nel considerare infinito come un numero (che sommato al suo opposto dà zero). Infinito **non è un numero** ma un simbolo il cui significato è stato spiegato precedentemente. Le operazioni con il simbolo di infinito sono in realtà altrettante indicazioni simboliche di alcuni risultati.

TEOREMA: date due successioni convergenti $a_n \to a$ e $b_n \to b$ la successione dei loro prodotti converge al prodotto dei limiti, cioè $a_n \cdot b_n \to ab$. Se $a_n \to +\infty$ e $b \neq 0$, allora $a_n \cdot b_n \to \pm\infty$ col segno o meno a seconda della regola dei segni.

Se invece $a_n \to +\infty$ e $b = 0$, allora i due fattori del prodotto agiscono in maniera opposta: uno diventa sempre più grande, l'altro sempre più piccolo. Del loro prodotto non si può dire nulla senza ulteriori indagini. Si parla in questo caso della *forma indeterminata* $0 \cdot \infty$

ESEMPI:

- se $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ e $b_n = -3 - \frac{1}{n}$ allora $a_n \to 2^+$ e $b_n \to -3^-$. Pertanto la successione $\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(-3 - \frac{1}{n}\right)$ tende a –6
- se $a_n = n^2$ e $b_n = -1 + \frac{1}{n^2}$ allora $a_n \to +\infty$ e $b_n \to -1$. Pertanto la successione $n^2\left(-1 + \frac{1}{n^2}\right)$ tende a $-\infty$
- se $a_n = n^2 + 1$ e $b_n = \frac{1}{n}$ allora $a_n \to +\infty$ e $b_n \to 0$. Siamo nel caso dubbio. Il prodotto delle successioni è $\frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n}$ e tende a $+\infty$.
- se $a_n = n + 1$ e $b_n = \frac{1}{n+2}$ allora $a_n \to +\infty$ e $b_n \to 0$. Siamo nel caso dubbio. Il prodotto delle successioni è $\frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$ e tende a 1^-.

ATTENZIONE: è un errore ragionare come segue. "*Se una successione diverge a + infinito e l'altra converge a zero, allora qualunque numero moltiplicato per zero fa zero, e quindi il prodotto delle successioni tende a 0*". Come prima, l'errore sta ancora nel considerare infinito come un numero (che come tutti i numeri moltiplicato per zero dà zero). Inoltre, ragionando come sopra, si commette anche l'errore di considerare una successione che tende a zero come una i cui termini *siano zero*. Se una successione tende ad un certo limite, non vuol necessariamente dire che i valori di a_n assumano quel valore (osservazione già fatta nella lezione 12-13).

TEOREMA: date due successioni convergenti $a_n \to a$ e $b_n \to b \neq 0$ la successione dei loro quozienti converge al quoziente dei limiti, cioè $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$. La situazione negli altri casi è riassunta nella seguente tabella

a	*b*	*a/b*
$a \neq 0$	0	∞
∞	$b \neq \infty$	∞
$a \neq \infty$	∞	0
0	0	?
∞	∞	?

I casi dubbi sono segnalati dal "?" e corrispondono alle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

ESEMPI:

- se $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ e $b_n = -3 - \frac{1}{n}$ allora $a_n \to 2^+$ e $b_n \to -3^-$. Pertanto la successione $\frac{2 + \frac{1}{n}}{-3 - \frac{1}{n}}$ tende a –2/3

- se $a_n = n^2$ e $b_n = -1 + \frac{1}{n^2}$ allora $a_n \to +\infty$ e $b_n \to -1$. Pertanto la successione $\frac{n^2}{-1+\frac{1}{n^2}}$ tende a $-\infty$
- se $a_n = n^2 + 1$ e $b_n = n$ allora $a_n \to +\infty$ e $b_n \to \infty$. Siamo nel primo caso dubbio. Il quoziente delle successioni è $\frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n}$ e tende a $+\infty$.
- se $a_n = n + 1$ e $b_n = n + 2$ allora $a_n \to +\infty$ e $b_n \to +\infty$. Siamo nel primo caso dubbio. Il quoziente delle successioni è $\frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$ e tende a 1^-.
- se $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n^3 + n^2}$ allora $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$. Siamo nel secondo caso dubbio. Il quoziente delle successioni è $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3+n^2}} = \frac{n^3+n^2}{n} = n^2 + n$ e tende a $+\infty$.
- se $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n+2}$ allora $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$. Siamo nel secondo caso dubbio. Il quoziente delle successioni è $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n}$ e tende a 1^+.

ATTENZIONE: è un errore ragionare come segue. "*Se entrambe le successioni divergono a + infinito allora siccome un numero diviso se stesso fa 1, il limite è 1. Se entrambe le successioni sono infinitesime, allora per lo stesso motivo il limite è 1.* ". Come prima, l'errore sta ancora nel considerare infinito come un numero (che può essere diviso per se stesso) e nel considerare possibile la divisione per zero.

Da ricordare

La definizione di successione geometrica e le principali proprietà
La definizione del numero *e*
Sapere riconoscere le forme di indeterminazione nei vari casi (somma, prodotto, quoziente)

Lezione 16

Due teoremi

TEOREMA (del confronto): Se, almeno definitivamente, $a_n \leq b_n$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

Questo teorema è abbastanza ovvio nel suo contenuto. Consideriamo due successioni e supponiamo che una sia definitivamente minore dell'altra. Allora necessariamente se la prima ammette limite questo limite deve essere inferiore o al più uguale al limite della seconda. Il teorema vale anche con i segni delle disuguaglianze invertiti.

ESEMPIO: sia $a_n = \frac{1}{n^2+3}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$. La prima successione è definitivamente minore della seconda (in questo caso lo è sempre: il denominatore è maggiore). Allora il limite della prima è minore o uguale al limite della seconda. In questo caso, essi sono uguali entrambi a 0.

Se, nel precedente teorema, si sostituisce a b_n la successione identicamente nulla, si ottiene il seguente

TEOREMA (della permanenza del segno): Se, almeno definitivamente, $a_n \leq 0$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n \leq 0$.

In altre parole, il limite di una successione i cui termini (da un certo posto in poi) sono tutti negativi, non può che essere negativo o al più nullo. Vale ovviamente anche il teorema con i segni di disuguaglianza invertiti.

Confronto tra infiniti

Se si considera il limite del rapporto di due successioni a termini positivi a_n e b_n entrambe divergenti a $+\infty$, si possono verificare solo quattro casi: $\frac{a_n}{b_n} \to \begin{cases} 0 \\ k>0 \\ \infty \\ \text{non esiste} \end{cases}$.

DEFINIZIONE: Se $\frac{a_n}{b_n} \to 0$ si dice che a_n è un infinito di ordine inferiore rispetto a b_n e si scrive $a_n = o(b_n)$ (da leggere "*a con n o piccolo di b con n*").

In altre parole, entrambe le successioni divergono ma visto che il loro rapporto tende a zero vuol dire che l'infinito a denominatore b_n diverge in modo più rapido di quello al numeratore a_n.

ESEMPIO: siano $a_n = n+1$ e $b_n = n^2-1$. Il loro rapporto è $\frac{n+1}{n^2-1} = \frac{1}{n-1}$ e tende a 0. Quindi possiamo scrivere $a_n = o(b_n)$ oppure $n+1 = o(n^2+1)$. La successione $a_n = n+1$ tende all'infinito meno velocemente di $b_n = n^2-1$.

Nell'esempio appena visto, il fatto che il rapporto tenda a zero dipende sostanzialmente dal grado dei due polinomi a numeratore e a denominatore. Polinomi con grado diverso tendono all'infinito con diverse velocità: più il grado è alto più l'infinito è di ordine superiore.

Prof. Fabrizio Iozzi – email: fabrizio.iozzi@uni-bocconi.it

ESEMPIO: siano dati due investimenti di una lira, entrambi in capitalizzazione composta, ai tassi di interesse del 10% e del 15%. I due montanti, in funzione dell'anno *n* sono rispettivamente $a_n = (1+0.1)^n$ e $b_n = (1+0.15)^n$. Il loro rapporto è $\frac{(1+0.1)^n}{(1+0.15)^n} = \left(\frac{1.1}{1.15}\right)^n = (0.95652)^n \to 0$ (si tratta di una successione geometrica di ragione minore di 1). Il montante al 10% è un infinito di ordine inferiore al montante al 15%. In altre parole, col passare degli anni, l'investimento al 10% risulterà sempre più trascurabile rispetto a quello al 15%.

OSSERVAZIONE: se $a_n = o(b_n)$ allora non può essere che $b_n = o(a_n)$. Delle due successioni, una è di ordine superiore all'altra.

DEFINIZIONE: Se $\frac{a_n}{b_n} \to k > 0$ si dice che a_n è un infinito dello stesso ordine di b_n e si scrive $a_n = O(b_n)$ (da leggere "*a con n o grande di b con n*").

DEFINIZIONE: Se $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ si dice che a_n è asintotico a b_n e si scrive $a_n \sim b_n$ (da leggere "*a con n asintotico a b con n*").

In altre parole, entrambe le successioni divergono ma visto che il loro rapporto tende a un numero finito vuol dire che l'infinito a denominatore b_n diverge come un multiplo di quello al numeratore a_n. Nel caso particolare dell'asintotico, il rapporto tra le successioni tende ad 1. Questo caso è abbastanza interessante: nel seguito vedremo che per calcolare la maggior parte dei limiti, si ricorre alla nozione di asintotico, sostituendo ad alcune espressioni altre ad esse asintotiche ma più semplici.

ESEMPIO: siano dati due investimenti di una lira, entrambi in capitalizzazione semplice, ai tassi di interesse del 10% e del 15%. I due montanti, in funzione dell'anno *n* sono rispettivamente $a_n = 1 + 0.1n$ e $b_n = 1 + 0.15n$. Il loro rapporto è $\frac{1+0.1n}{1+0.15n} \to \frac{0.1}{0.15} = \frac{2}{3}$ e quindi le due successioni hanno lo stesso ordine di grandezza. In altre parole, il rapporto tra i due montanti tende col passare degli anni ad assumere il valore 2/3.

ATTENZIONE: se due successioni sono asintotiche, non vuol dire che la loro differenza tenda a zero! Ad esempio, le successioni $n^2 + n$ e n^2 sono asintotiche ma la loro differenza è *n* e diverge. Questo semplice esempio mette in guardia dal sostituire ad un'espressione un'altra ad essa asintotica nelle somme. Viceversa, questa operazione è lecita nei prodotti e nei quozienti.

DEFINIZIONE: Se $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$ si dice che a_n è un infinito di ordine superiore di b_n e si scrive $b_n = o(a_n)$ (da leggere "*b con n o piccolo di a con n*").

ATTENZIONE: a non confondere questa definizione con quella di infinito di ordine inferiore data all'inizio della lezione. Le due definizioni sono speculari (e speculare è la relazione di o–piccolo).

DEFINIZIONE: Se $\frac{a_n}{b_n}$ non tende a nessun limite si dice che a_n e b_n non sono confrontabili.

Le precedenti definizioni permettono di stabilire, tra le successioni divergenti, una gerarchia che assegna i primi posti alle successioni che divergono più rapidamente e gli ultimi a quelle che divergono meno rapidamente. Ci si convince facilmente che, nel caso dei polinomi, questa gerarchia è associata al grado del polinomio (ricordiamo che il grado di un polinomio è il grado massimo dei monomi che compongono il polinomio). Quindi, ad esempio, $n^4 + n^3 + n + 1$ è infinito di ordine superiore rispetto a $n^2 + n$ e inferiore rispetto a $n^5 + 2n + 3$.

La gerarchia si estende facilmente anche agli esponenti non interi postivi. Quindi, ad esempio, $n\sqrt{n} = n^{3/2}$ è infinito di ordine superiore a $\sqrt[3]{n} = n^{1/3}$ ed è anche superiore ad *n*. Gli interi negativi qui non interessano (non sono infiniti ma infinitesimi).
La gerarchia è quindi la seguente (prima gli infiniti di ordine superiore):

$$\ldots \sqrt[3]{n}, \sqrt{n}, n, n^2, n^3, n^4, n^5 \ldots$$

Per essere completa, questa gerarchia deve essere completata con due successioni infinite di cui non ci siamo ancora occupati: le successioni geometriche (con ragione maggiore di 1, le uniche divergenti) e le successioni come $\ln n$, $\ln^2 n$. La loro posizione si chiarisce col cosiddetto "criterio del rapporto".

TEOREMA: sia data una successione a_n a termini positivi e sia L il limite della successione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

Allora

- se $L < 1$ la successione a_n tende a 0
- se $L > 1$ la successione a_n diverge
- se $L = 1$ non si può dire nulla.

Il risultato di questo teorema (che di fatto è uno strumento per conoscere il carattere di una successione) ci permette di esaminare in dettaglio la successione geometrica. Supponiamo di voler confrontare la successione geometrica q^n ($q > 1$) con la potenza *k*–esima di *n*. Dobbiamo calcolare il valore del limite di $\frac{q^n}{n^k}$. Usiamo il criterio del rapporto. Il termine *n+1*–esimo è $\frac{q^{n+1}}{(n+1)^k}$ e il rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ risulta uguale a $\frac{q^{n+1}}{(n+1)^k} \cdot \frac{n^k}{q^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k q$. Il termine in parentesi (l'unico che dipenda da *n*) tende a 1 e quindi il rapporto tende a *q* che è maggiore di 1. Il criterio del rapporto ci dice quindi che la successione $\frac{q^n}{n^k}$ diverge e cioè che q^n è un infinito di ordine superiore a n^k. Siccome *k* non è stato specificato, possiamo dedurre che la successione geometrica di ragione maggiore di 1 è un infinito di ordine superiore a qualsiasi potenza di *n*. Tra di loro, le successioni geometriche sono regolate dalle basi: più grande è la base, maggiore è l'infinito corrispondente.

Siamo quindi in grado di completare parzialmente la gerarchia precedente, aggiungendo gli esponenziali:

$$\ldots \sqrt[3]{n}, \sqrt{n}, n, n^2, n^3, n^4, n^5 \ldots 2^n, e^n, 3^n, \ldots n!, n^n$$

(dove abbiamo messo le basi a solo titolo di esempio).

Per quanto riguarda i logaritmi, si può seguire un ragionamento analogo per concludere che i logaritmi si trovano al punto più basso della gerarchia che risulta così completa.

$$\ldots \ln(\ln n), \ln n \ldots \sqrt[3]{n}, \sqrt{n}, n, n^2, n^3, n^4, n^5 \ldots 2^n, e^n, 3^n, \ldots n!, n^n, \ldots$$

Siamo a questo punto in grado di risolvere rapidamente alcuni calcoli dei limiti.

ESEMPI:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n^2+1}$. Il numeratore e il denominatore sono asintotici entrambi a n^2. Il loro quoziente, quindi tende a $\dfrac{n^2}{n^2} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - 3n - 4}{\sqrt{n^4+1}}$. Il numeratore è asintotico a $2n^2$. Il denominatore è asintotico a $\sqrt{n^4} = n^2$ (l'1 è trascurabile rispetto a n^4). Il limite è quindi uguale a 2.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{n+\sqrt[3]{n}}$. Il numeratore è asintotico a $2n$. Il denominatore è asintotico a *n* (la radice cubica è trascurabile rispetto alla potenza). Il limite è quindi ancora 2.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{10 + n\sqrt{n}}$. Il denominatore è asintotico a $n\sqrt{n}$ e quindi il quoziente è asintotico a $\dfrac{n^2}{n\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. Il limite è quindi $+\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + n^2}{n^3 - 3^n}$. Il numeratore è asintotico a 2^n e il denominatore a -3^n. Il quoziente è quindi asintotico a $-\dfrac{2^n}{3^n} = -\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \to 0^-$

Confronto tra infinitesimi

La situazione descritta per gli infiniti può essere facilmente tradotta in termini di infinitesimi. Infatti, se una successione a_n è infinita, la successione $\dfrac{1}{a_n}$ è infinitesima. La definizione di asintotico e quella di o piccolo sono identiche alle precedenti. Cambiano però le descrizioni. Se $a_n = o(b_n)$ si dice che a_n è infinitesima di ordine superiore di b_n. In questo caso, poiché si tratta di infinitesimi, gli infinitesimi di ordine superiore sono trascurabili rispetto a quelli di ordine inferiore. La gerarchia di infinitesimi (in ordine crescente) è la seguente:

$$\ldots e^{-n} \ldots, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ldots$$

ESEMPIO:

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{e^{-n}+\frac{1}{n}}$. Il numeratore è asintotico a $\frac{1}{n}$ (perché $\frac{1}{n^2}$ è infinitesimo di ordine superiore) e il denominatore è asintotico a $\frac{1}{n}$ (perché e^{-n} è infinitesimo di ordine superiore). Il limite è quindi 1.

Esercizi

1. Date le seguenti coppie di successioni, stabilire se tra di esse vale una delle relazioni (o, O, ~)
   a) $a_n = n+1$ $\qquad b_n = n+2$
   b) $a_n = n^2+n$ $\qquad b_n = n^2-n$
   c) $a_n = n^3$ $\qquad b_n = n^2+\sqrt{n}$
   d) $a_n = n+\ln n$ $\qquad b_n = e^n$
   e) $a_n = \ln n + e^{-n}$ $\qquad b_n = n$
2. Calcolare i limiti per n tendente all'infinito delle seguenti successioni
   a) $\left(-\frac{5}{6}\right)^n$ $\qquad$ b) $\frac{2n^2+\sqrt{n}}{3n^2-2e^{-n}}$ $\qquad$ c) $\frac{6e^n+n}{e^n+6}$
3. Il mercato acquistato da un prodotto varia nel tempo secondo la legge $a_n = \frac{4000}{3}+\frac{2}{3}a_{n-1}$. Se $a_0 = 0$, quanto vale a_2?

Soluzioni

1.
   a) $a_n = n + 1$ $\quad b_n = n + 2$ $\quad a_n \sim b_n$
   b) $a_n = n^2 + n$ $\quad b_n = n^2 - n$ $\quad a_n \sim b_n$
   c) $a_n = n^3$ $\quad b_n = n^2 + \sqrt{n}$ $\quad b_n = o(a_n)$
   d) $a_n = n + \ln n$ $\quad b_n = e^n$ $\quad a_n = o(b_n)$
   e) $a_n = \ln n + e^{-n}$ $\quad b_n = n$ $\quad a_n = o(b_n)$
2. Calcolare i limiti per n tendente all'infinito delle seguenti successioni
   a) $\left(-\frac{5}{6}\right)^n \to 0$ b) $\frac{2n^2 + \sqrt{n}}{3n^2 - 2e^{-n}} \to \frac{2}{3}$ c) $\frac{6e^n + n}{e^n + 6} \to 6$
3. Il mercato acquistato da un prodotto varia nel tempo secondo la legge $a_n = \frac{4000}{3} + \frac{2}{3} a_{n-1}$. Se $a_0 = 0$, quanto vale a_2?
   $a_1 = \frac{4000}{3} + \frac{2}{3} a_0 = \frac{4000}{3}$,
   $a_2 = \frac{4000}{3} + \frac{2}{3} a_1 = \frac{4000}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4000}{3} = \frac{4000}{3} + \frac{8000}{3} = \frac{12000}{3} = 4000$

Lezioni 17-18

Limiti di funzioni

Il concetto di limite di successioni si estende immediatamente al limite di funzioni. Mentre per una successione ha senso dire che n tende all'infinito e null'altro, per le funzioni ha senso dire che la variabile indipendente *x* tende ad un valore finito o ad infinito (sia esso $+\infty$ o $-\infty$).

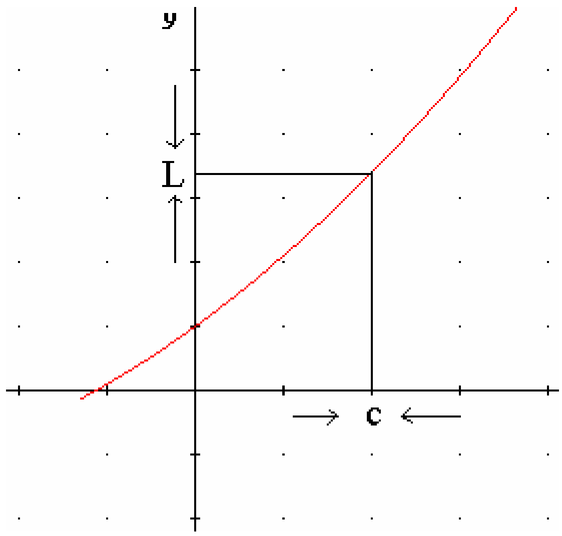
In questa lezione parleremo di una funzione $f : E \to R$ dove *E* è un sottoinsieme aperto di R (in altre parole l'intorno di un opportuno punto *c*).

Limite finito per x tendente ad un valore finito

DEFINIZIONE: se per qualunque successione di punti x_n del dominio di *f* convergente a *c*, la successione delle immagini $f(x_n)$ tende ad un numero L, si dice che "la funzione *f* tende a L per *x* tendente a *c*" e si scrive

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

In altri termini, meno precisi, avvicinandoci al punto *c* i valori della funzione *f* si avvicinano al valore *L*. La situazione è rappresentata nel grafico seguente.



La definizione si può raffinare ulteriormente a seconda che la successione x_n converga a *c* per eccesso o per difetto. Questo equivale geometricamente ad avvicinarsi al punto *c* da destra (per eccesso) o da sinistra (per difetto). Le due circostanze si indicano aggiungendo all'esponente un "+" o un "–". Per esempio, scrivere che $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 5$, vuol dire che se ci avviciniamo al punto 3 da destra (cioè da valori maggiori di 3) i valori della funzione si avvicinano a 5.
La stessa distinzione può essere anche fatta per i valori della funzione e viene indicata in modo analogo. Quindi, la scrittura $\lim_{x \to 3} f(x) = 5^-$ sta ad indicare che se ci avviciniamo al punto 3 i valori della funzione si avvicinano al punto 5 da "sotto" (cioè da valori inferiori a 5).

DEFINIZIONE: Il limite $\lim_{x \to c^+} f(x)$ si chiama *limite destro*. Il limite $\lim_{x \to c^-} f(x)$ si chiama limite sinistro.

OSSERVAZIONE: Ovviamente, perché il limite esista è necessario che il limite destro e il limite sinistro esistano e siano uguali (perché la definizione di limite richiede che la convergenza avvenga "per ogni successione convergente a *c*"

OSSERVAZIONE: si noti che gli stessi simboli, + e – hanno un significato diverso a seconda che si trovino sotto il segno di limite o nei valori del limite.

- Quando sono *sotto il segno di limite*, indicano una caratteristica dei valori *x*, cioè delle variabili indipendenti. Essi hanno effetto sull'asse delle *x*. "+" vuol dire "valori maggiori di …" e quindi "da destra" (e "–" vuol dire "da sinistra").
- Quando sono nel *valore del limite* indicano una caratteristica dei valori *y*, cioè delle variabili dipendenti. Essi hanno effetto sull'asse delle *y*. "+" vuol dire "valori maggiori di …" e quindi "da sopra" (e "–" vuol dire "da sotto")

OSSERVAZIONE: il fatto che il limite di una certa funzione per x tendente a c sia un dato valore L, non vuol dire che la funzione a) esista nel punto $x = c$ né che b) essa abbia il valore *L* nel punto $x = c$.

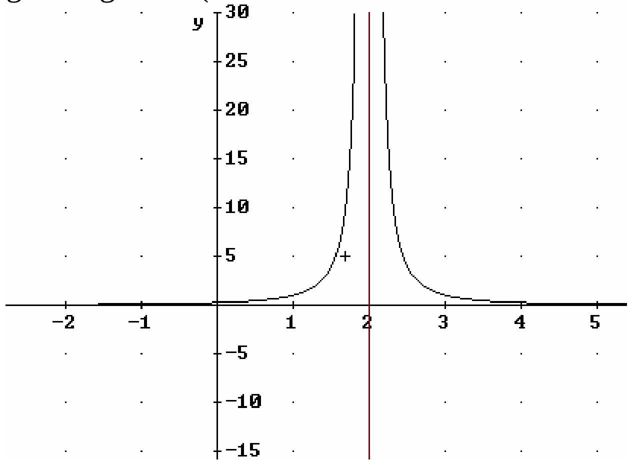
ESEMPIO: la funzione $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$ non esiste per $x = -2$ (il denominatore si annulla).
Tuttavia, se attribuiamo alla *x* valori sempre più prossimi a –2 (sia per eccesso sia per difetto) ci accorgiamo che i valori della funzione si avvicinano a –0.25

x	*f*(*x*)
–1.5	– 0.28571
–1.9	– 0.25641
–2.1	– 0.24390
–1.99	– 0.25062
–2.01	– 0.24937

quindi potremo scrivere $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^2-4} = -0.25$.

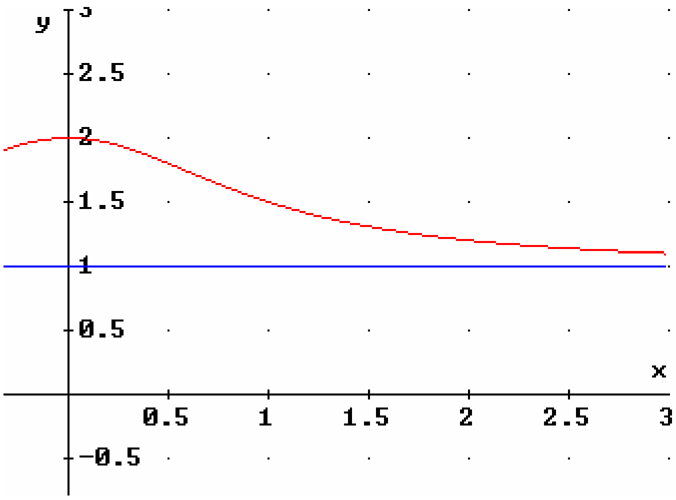
Limite infinito per x tendente ad un valore finito (asintoti verticali)

Quando il limite L è infinito si dice che le funzioni *divergono* a $+\infty$ o a $-\infty$. In questo caso si dice che la retta *x* = *c* è *asintoto verticale* per il grafico di *f*. Se la relazione vale *solo* per il limite destro o il limite sinistro, si parla di asintoto verticale destro o sinistro. Un esempio di situazione di questo tipo è rappresentata dal seguente grafico (in cui l'asintoto verticale è la retta *x* = 2).



Limite finito per *x* tendente all'infinito

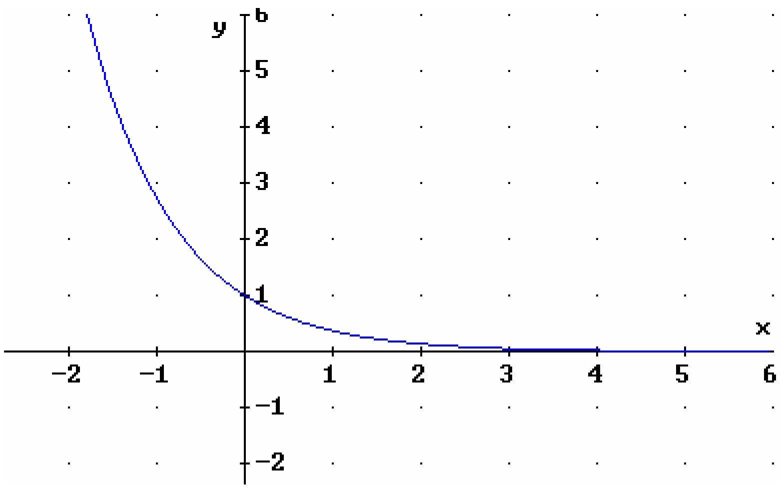
Per studiare il comportamento di una funzione quando la variabile *x* assume valori definitivamente maggiori di un qualunque numero finito M, possiamo utilizzare una successione divergente a $+\infty$. In questo caso, se il limite è finito si scriverà $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$. La retta $y = L$ si dice *asintoto orizzontale a* $+\infty$ per la funzione *f(x)*.



Nel caso rappresentato in figura, la funzione (in rosso) ha come asintoto orizzontale a $+\infty$ la retta $y = -1$.
Il caso di asintoto per *x* tendente a meno infinito è analogo.

Limite infinito per *x* tendente all'infinito

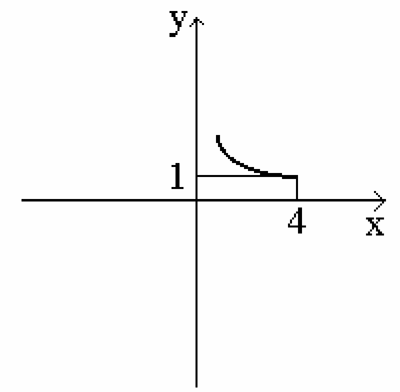
Se, nel caso precedente, il limite *L* è infinito si scrive $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ oppure $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. In questo caso, al divergere di *x* corrisponde il divergere di *f*(*x*). Sono possibili diverse situazioni; quella che segue è rappresentativa di una funzione per cui $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (e per cui $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$ – si tratta in realtà della funzione $y = e^x$)



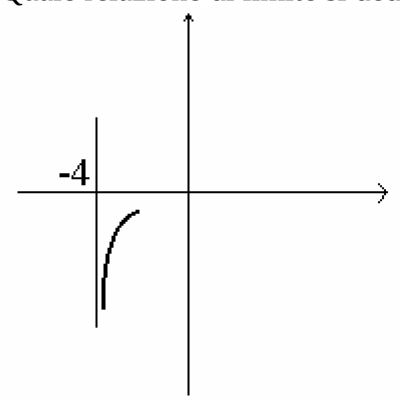
Per i limiti di funzioni valgono discorsi analoghi a quelli fatti per i limiti di successioni (unicità del limite, teoremi di convergenza di funzioni monotone).

Esercizi

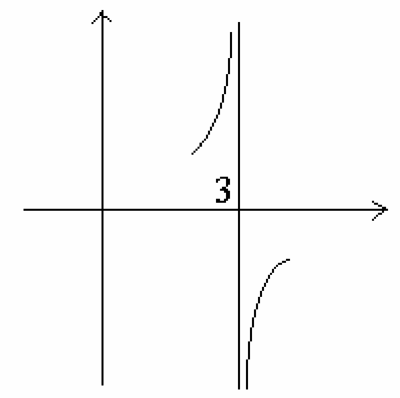
1. Della funzione $f(x)$ si sa che $\lim_{x\to 2} f(x) = -3^+$. Come è fatto il suo grafico in un intorno del punto di ascissa 2?
2. Della funzione $f(x)$ si sa che $\lim_{x\to -3^-} f(x) = -1^-$. Come è fatto il suo grafico in un intorno del punto di ascissa –3?
3. Della funzione $f(x)$ si sa che $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$. Come è fatto il suo grafico per $x \to +\infty$?
4. Della funzione $f(x)$ si sa che $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3^+$. Come è fatto il suo grafico in un intorno del punto di ascissa 2?
5. Quale relazione di limite si deduce osservando il seguente grafico?



6. Quale relazione di limite si deduce osservando il seguente grafico?

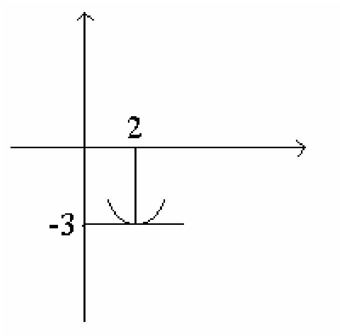


7. Quale relazione di limite si deduce osservando il seguente grafico?

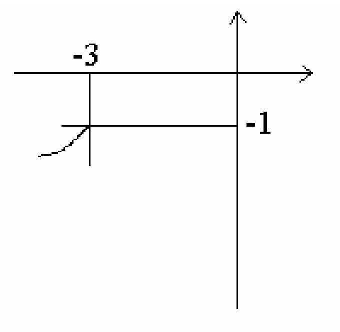


Soluzioni

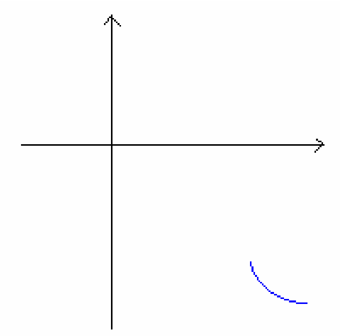
1. Un esempio di funzione tale che $\lim_{x\to 2} f(x) = -3^+$ è il seguente



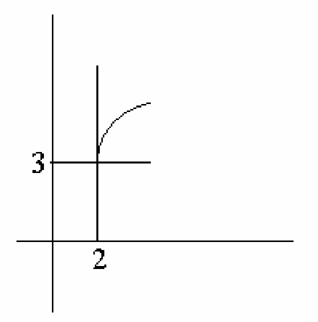
2. Un esempio di funzione tale che $\lim_{x\to -3^-} f(x) = -1^-$ è il seguente



3. Un esempio di funzione tale che $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ è il seguente



4. Un esempio di funzione tale che $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3^+$ è il seguente



5. $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1^+$
6. $\lim_{x\to -4^+} f(x) = -\infty$
7. $\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$, o meglio, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

Lezioni 19-20

Funzioni continue

Una classe di funzioni merita attenzione per le sue proprietà: la classe delle funzioni continue. Esse si caratterizzano per una particolare proprietà che si definisce attraverso un limite.

DEFINIZIONE: data una funzione *f* si dice che essa è continua in un punto x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

OSSERVAZIONE: la definizione di funzione continua richiede quindi che
a) il limite esista nel punto x_0 (e quindi esistano e siano uguali i limiti destro e sinistro)
b) la funzione esista nel punto x_0
c) il valore del limite e quello della funzione siano uguali

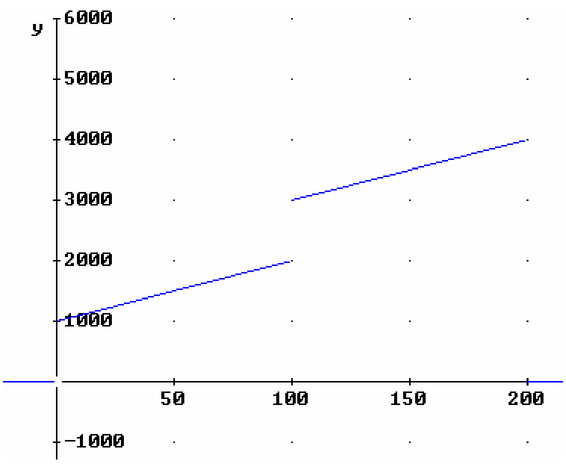
DEFINIZIONE: Quando una qualsiasi di queste condizioni non è verificata si dice che la funzione ha una *discontinuità* nel punto x_0.

OSSERVAZIONE: la definizione di funzione continua contiene un limite ed è perciò legata all'intorno del punto x_0. Il concetto di continuità è quindi un concetto *locale*.

DEFINIZIONE: una funzione si dice *continua in un insieme* se è continua in tutti i punti di quell'insieme.

La classe delle funzioni continue è molto ampia e comprende, per esempio, tutte le funzioni algebriche (polinomi e quozienti di polinomi) in ogni punto del loro insieme naturale di definizione sono continue. Ma in alcune applicazioni si ha a che fare con funzioni discontinue.

ESEMPIO: Per produrre un certo bene, un'azienda ha bisogno di una macchina del costo di 1000 euro. La macchina è capace di lavorare solo 100 pezzi alla settimana. L'impresa possiede già una macchina. Il costo di produzione per le prime cento unità è dato da $c(q) = 1000 + 10q$, dove 1000 è il costo fisso della macchina e 10 è il costo unitario. Tuttavia, se la produzione supera le 100 unità, il costo è dato dalla funzione $c(q) = 2000 + 10q$, perché per produrre il 101esimo pezzo (e per tutti i successivi) occorre acquistare un'altra macchina. La rappresentazione analitica della funzione è $c(q) = \begin{cases} 1000 + 10q & \text{per } q \le 100 \\ 2000 + 10q & \text{per } q > 100 \end{cases}$. e il suo grafico della funzione è il seguente.



ed è quello di una funzione discontinua nel punto $x = 100$.

DEFINIZIONE: i punti di discontinuità per cui i limiti destro e sinistro della funzione sono diversi si chiamano *discontinuità a salto* o di *prima specie*.

La discontinuità dell'esempio precedente è a salto. Le altre discontinuità si verificano nei due seguenti casi.

DEFINIZIONE: i punti di discontinuità per cui almeno uno dei due limiti (destro o sinistro o entrambi) della funzione non esiste si chiamano *discontinuità di seconda specie*.

DEFINIZIONE: i punti di discontinuità per cui il limite della funzione esiste ma il valore della funzione non esiste o è diverso dal limite si chiamano *discontinuità eliminabili*. Basta infatti definire (o ridefinire) la funzione nel punto x_0 per ripristinare la continuità.

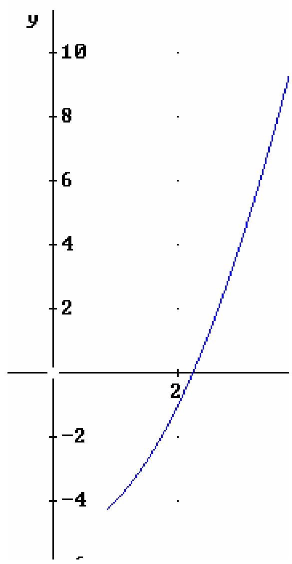
ESEMPIO: sia data la funzione $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$. La funzione non è definita nel punto $x = 2$. Tuttavia $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$. Si tratta quindi di una discontinuità eliminabile. La funzione f può quindi essere ridefinita nel punto $x = 2$ in modo che la funzione risultante sia continua. La nuova funzione f è data da $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4} & \text{per } x \neq 2 \\ \frac{1}{4} & \text{per } x = 2 \end{cases}$

Proprietà delle funzioni continue

Le funzioni continue hanno particolari proprietà che sono riassunte nella forma di teorema.

DEFINIZIONE: un punto in cui una funzione si annulla si chiama *zero della funzione*.

TEOREMA (degli zeri): se f è una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$ e se i valori di f negli estremi dell'intervallo sono discordi (cioè di segno opposto), esiste almeno un punto x_0 in cui la funzione f si annulla, cioè $f(x_0) = 0$. Se, in particolare, f è una funzione monotona, il punto x_0 è unico.



Questo teorema è abbastanza intuitivo: se la funzione è, ad esempio, positiva in $x = a$ e negativa in $x = b$, allora necessariamente, essendo continua deve attraversare almeno una volta l'asse delle x. Il punto in cui l'attraversa è lo zero della funzione (vedi figura accanto)

TEOREMA (dei valori intermedi o di Darboux): se *f* è una funzione continua in un intervallo [*a*, *b*] essa assume almeno una volta tutti i valori compresi tra *f*(*a*) e *f*(*b*). In altre parole, qualunque sia λ compreso tra *f*(*a*) e *f*(*b*), esiste un punto *c* compreso tra *a* e *b*, tale che *f*(*c*) = λ.

La proprietà di Darboux è anch'essa immediata. La continuità della funzione "impedisce" che i valori della funzione stessa "saltino" da un valore ad un altro senza passare per tutti i valori intermedi.

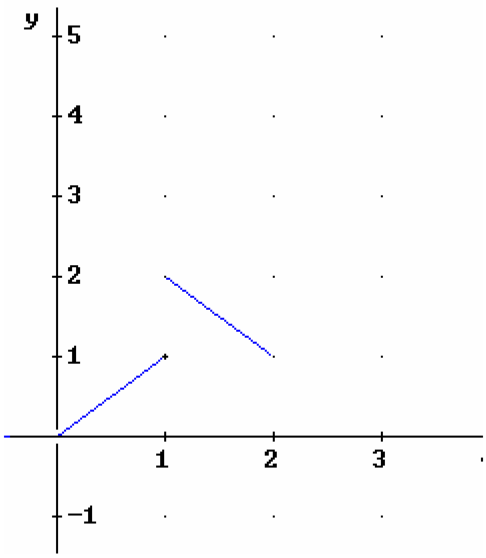
TEOREMA (continuità della funzione inversa): Se la funzione *f* è continua e invertibile in un intervallo allora la sua inversa è continua (nel suo intervallo di definizione).

TEOREMA (di Weierstrass): una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [*a*, *b*] assume sempre il valore massimo e minimo nell'intervallo.

Questo teorema è alla base di numerosi risultati teorici ma anche di molte applicazioni. Nell'economia e nelle scienze si ha a che fare spesso con problemi in cui bisogna trovare il valore massimo o minimo di una certa funzione (per esempio, il massimo profitto, il minimo costo, ecc.). Il teorema di Weierstrass ci garantisce se cerchiamo questo valore estremo in un intervallo chiuso e limitato lo troveremo sicuramente.

OSSERVAZIONE: naturalmente, se una delle ipotesi del teorema cade, l'enunciato potrebbe non essere più valido. Ad esempio, se consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo (1, 2] (che non è chiuso), abbiamo un massimo (4) ma non abbiamo valore minimo perché il punto $x = 1$ è escluso dal dominio della funzione.

Oppure, se consideriamo la funzione $f(x) = \begin{cases} x & \text{per } 0 \le x \le 1 \\ 3 - x & \text{per } 1 < x \le 2 \end{cases}$ che è definita nell'intervallo chiuso e limitato [0, 2] e che non è continua vediamo che essa non ha massimo assoluto. Il suo grafico è mostrato in figura.



Operazioni con i limiti

Come per le successioni, così per le funzioni si possono svolgere alcune operazioni con i limiti, naturalmente prendendo le stesse precauzioni quando si incontrano le forme indeterminate.

Nel seguito, tutti i limiti che considereremo saranno per $x \to c$

TEOREMA: se $\lim f(x) = L$ e $\lim g(x) = M$, con *L* e *M* valori finiti, allora

- $\lim f + g = L + M$
- $\lim fg = LM$
- $\lim \frac{f}{g} = \frac{L}{M}$ (se *M* è diverso da 0)

La situazione risulta più problematica nei casi già indicati per le successioni, e in questi casi si giunge alle forme indeterminate $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ che si risolvono in modo analogo a quanto visto per le successioni.

OSSERVAZIONE: valgono ancora tutte le definizioni date per le successioni ed in particolare quelle di infinito, infinitesimo, asintotico e o-piccolo.

DEFINIZIONE: date due funzioni *f* e *g* si dice che *f* è asintotica a *g* se $\lim \frac{f}{g} = 1$ (naturalmente in questo caso si ha che *g* è asintotica a *f*). Si scrive $f \sim g$

DEFINIZIONE: si dice che *f* è o-piccolo di *g* se $\lim \frac{f}{g} = 0$ e si scrive $f = o(g)$. (in questo caso non vale la relazione simmetrica $g = o(f)$)

Le due definizioni si danno sia nel caso in cui *f* e *g* tendano a 0 sia nel caso in cui tendano a $+\infty$.

Alcuni limiti notevoli

Alcuni risultati particolari del calcolo dei limiti servono per potersi muovere con agilità in questo settore e per risolvere alcuni esercizi. Passiamo in rassegna i principali risultati.

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Questo risultato poteva essere espresso anche nella forma $\operatorname{sen} x \sim x$ per $x \to 0$.
  In altre parole, essendo sen *x* e *x* infinitesimi per *x* tendente a 0, essi sono infinitesimi dello stesso ordine, cioè "vanno a 0 con la stessa velocità". Da un punto di vista numerico, si può fare la verifica calcolando per valori di *x* sempre più vicini a 0 sen *x* e verificando che essi sono definitivamente vicini (cioè che la loro differenza tende a 0)
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$. Il limite si presenta come una forma indeterminata 0/0. Tuttavia, il fatto che il risultato sia 1/2 ci dice che i due infinitesimi sono dello stesso ordine. Questo risultato si poteva esprimere dicendo anche che $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$ oppure $\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{1}{2}x$. Questa formula

si può leggere anche come un'approssimazione di $\sqrt{1+x}$: se x è abbastanza vicino a 0, allora $\sqrt{1+x}$ è abbastanza vicino a $1+\frac{1}{2}x$ e più x si avvicina a 0 più questa approssimazione è corretta.

- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. Analogamente a quanto visto per il primo limite, questo risultato si poteva esprimere anche scrivendo $\ln(1+x)\sim x$ per x tendente a 0.
- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, cioè $e^x-1\sim x$ per x tendente a 0.
- $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^k}{e^x}=0$ per qualsiasi valore di k. Il limite è lo stesso che abbiamo incontrato nelle successioni e dice, in sostanza, che l'esponenziale cresce più velocemente di qualsiasi potenza.
- $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^k}=0$ per qualsiasi valore di k. Il limite è lo stesso che abbiamo incontrato nelle successioni e dice, in sostanza, che il logaritmo cresce più lentamente di qualsiasi potenza.

Come per le successioni, quindi, si può creare una gerarchia di infiniti e una gerarchia di infinitesimi. La gerarchia di infiniti ($x\to\infty$) è:

$$\ln x,\ldots,\sqrt[3]{x},\sqrt{x},x,x^2,x^3,\ldots,2^x,e^x,\ldots,x^x$$

mentre quella di infinitesimi ($x\to 0$) è

$$\ldots,x^3,x^2,x,\sqrt{x},\sqrt[3]{x},\ldots$$

(si ricordi che in questo caso ln x e gli esponenziali *non* sono infinitesimi).

OSSERVAZIONE: come si vede, molti dei limiti notevoli sono per x tendente a 0. Come si può risolvere un limite se x non tende a zero? o se non riconosciamo immediatamente un limite notevole? La risposta è nella tecnica del cambio di variabile. Questa tecnica permette di sostituire alla variabile x un'altra variabile, ad esempio t, definita da una relazione che la lega a x, in modo che il limite in t sia più semplice di quello in x. Naturalmente esistono delle restrizioni al tipo di relazioni che si possono usare per il cambio di variabile ma se le relazioni sono continue, si può essere sicuri che l'operazione è lecita.

ESEMPI

- $\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$. Questo limite non è uno di quelli conosciuti. Tuttavia se poniamo $y=-x$ allora se $x\to -\infty$, necessariamente $y\to +\infty$ e il limite diventa
$$\lim_{y\to +\infty}\left(1-\frac{2}{y}\right)^{-y}=\left[\lim_{y\to +\infty}\left(1+\frac{-2}{y}\right)^{y}\right]^{-1}=\left(e^{-2}\right)^{-1}=e^2$$
- $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$. Se poniamo $x=1+t$, allora se x tende a 1, t tende a 0. Poiché $t=x-1$ il limite proposto diventa $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}$ ed è uguale a 1. In generale, quando si ha un limite per x tendente

a un valore *c* diverso da 0, può convenire trasformarlo in un limite per *t* tendente a zero con una sostituzione del tipo $x = c + t$; il motivo è che tutti i limiti notevoli sono scritti per *x* che tende a 0.

Esercizi

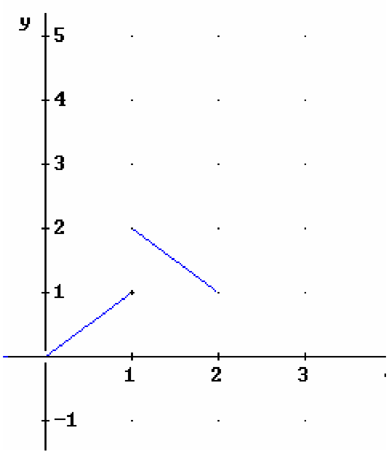
1. Stabilire per quali valori di *a* la funzione $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{per } x < 2 \\ 3-ax & \text{per } x \geq 2 \end{cases}$ è continua.
2. Stabilire per quali valori di *a* e *b* la funzione $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{per } x < 0 \\ ax^2 + b & \text{per } 0 \leq x \leq 2 \\ 5-x & \text{per } x > 2 \end{cases}$ è continua.
3. Calcolare i seguenti limiti:
   a) $\lim_{t \to +\infty} 2000 \frac{e^t}{e^t + 8}$
   b) $\lim_{t \to -\infty} 2000 \frac{e^t}{e^t + 8}$
   c) $\lim_{p \to 0^+} 160 - 8p - \frac{200}{p}$
   d) $\lim_{p \to +\infty} 160 - 8p - \frac{200}{p}$
   e) $\lim_{x \to 0} \frac{x + \sqrt{x}}{x^2 - x}$
   f) $\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x^2 - x}$
   g) $\lim_{x \to -\infty} (x^3 + 3x)e^x$
4. La funzione $f : \mathrm{R} \setminus \{0\} \to \mathrm{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \log x & \text{per } x > 0 \\ 7x & \text{per } x < 0 \end{cases}$ è continua
   a) in nessun sottoinsieme del suo dominio
   b) in R
   c) in tutto il suo dominio
   d) solo in $(-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$
5. Sia $f(x) = o(x^3)$ per $x \to \infty$. Allora, necessariamente, a) $f(x) \to \infty$, b) $f(x) = o(x^7)$, c) $f(x) \to 0$, d) $f(x) \to 3$
6. Sia $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 4 \\ 3 & x = 4 \end{cases}$, allora $\lim_{x \to 4} f(x)$ = a) $+\infty$, b) non esiste, c) 3, d) 4
7. Sia $f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$, allora la funzione *f* ammette limite per *x* tendente a 0 a) solo per *a* = 0 b) per nessun valore di *a* c) per ogni valore di *a* d) solo per *a* = 1
8. Quale implicazione è corretta: a) se *f* è continua allora *f* è invertibile b) se *f* è invertibile allora *f* è continua c) se *f* è strettamente crescente allora *f* è invertibile d) se *f* è invertibile allora *f* è monotona

9. Sia $f(x)=\begin{cases} a-2x & -2\le x\le 0 \\ 2a-4 & 0<x\le 4 \end{cases}$. Per quali valori di a la funzione verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass? a) a = 4 b) a = 2 c) nessun valore di a d) a = 0.

Soluzioni

1. Stabilire per quali valori di a la funzione $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{per } x<2 \\ 3-ax & \text{per } x\geq 2\end{cases}$ è continua. Poiché nel punto $x = 2$ la funzione vale $3 – 2a$ e $\lim_{x\to 2^-} x-1=1$, dovrà essere $3-2a=1$, cioè $a = 1$
2. Stabilire per quali valori di a e b la funzione $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{per } x<0 \\ ax^2+b & \text{per } 0\leq x\leq 2 \\ 5-x & \text{per } x>2\end{cases}$ è continua. Poiché $f(0) = b$, $f(2) = 4a + b$, $\lim_{x\to 0^-} x+1=1$ e $\lim_{x\to 2^+} 5-x=3$ dovrà essere $b = 1$ e $4a + b = 3$, cioè $a = 1/2$
3. Calcolare i seguenti limiti:
   a) $\lim_{t\to+\infty} 2000\frac{e^t}{e^t+8}=2000^-$ perché e^x diverge se x diverge a $+\infty$.
   b) $\lim_{t\to-\infty} 2000\frac{e^t}{e^t+8}=0^+$ perché e^x tende a 0 se x diverge a $-\infty$.
   c) $\lim_{p\to 0^+} 160-8p-\frac{200}{p}=-\infty$
   d) $\lim_{p\to +\infty} 160-8p-\frac{200}{p}=-\infty$
   e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+\sqrt{x}}{x^2-x}\sim\frac{\sqrt{x}}{-x}=-\frac{1}{\sqrt{x}}\to-\infty$ perché se x tende a 0, le potenze che contano di più sono quelle con esponente minore.
   f) $\lim_{x\to \infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x^2-x}\sim\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}\to 0^+$ perché se x tende a $+\infty$, le potenze che contano di più sono quelle con esponente maggiore.
   g) $\lim_{x\to -\infty} (x^3+3x)e^x=0^-$. Il termine in parentesi tende a – infinito mentre l’esponenziale tende a zero: si tratta quindi di una forma indeterminata $0\cdot\infty$. Per la gerarchia degli infiniti, l’esponenziale tende a zero più velocemente di qualsiasi potenza e quindi il limite è 0 con il segno – perché i due fattori sono discordi.
4. La funzione $f : \mathrm{R}\setminus\{0\}\to\mathrm{R}$ definita da $f(x)=\begin{cases} \log x & \text{per } x>0 \\ 7x & \text{per } x<0\end{cases}$ è continua
   a) in nessun sottoinsieme del suo dominio
   b) in R
   c) in tutto il suo dominio
   d) solo in $\left(-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}\right)$
   La risposta corretta è c). La funzione, infatti, non è continua in R (che contiene lo 0) ma è continua in tutto il suo dominio (che è R privato dell’origine).
5. Sia $f(x)=o(x^3)$ per $x\to\infty$. Allora, necessariamente, a) $f(x)\to\infty$, b) $f(x)=o(x^7)$, c) $f(x)\to 0$, d) $f(x)\to 3$. L’affermazione significa che f è trascurabile rispetto a x^3 che è un infinito (perché x tende a + infinito). Questo potrebbe essere vero sia nel caso c) sia nel caso d) (in entrambi i casi la f tende ad un valore finito) ma anche se f fosse ad esempio uguale a x^2 che è un infinito ma di ordine inferiore a x^3. Quindi anche la a) potrebbe essere vera. Nessuna delle tre, però, è necessariamente vera! Invece la b) è sicuramente vera, perché se la f è trascurabile rispetto a x^3 a maggior ragione lo è rispetto a x^7. La risposta giusta è quindi b).

6. Sia $f(x)=\begin{cases} x & x\neq 4 \\ 3 & x=4 \end{cases}$, allora $\lim_{x\to 4} f(x)$ = a) $+\infty$, b) non esiste, c) 3, d) 4. La risposta giusta è la d) Infatti per l'esistenza del limite importano solo i valori della funzione nell'intorno del punto e non il valore nel punto. Dal punto di vista della continuità si tratta di una funzione con una discontinuità eliminabile (a patto di ridefinire la funzione nel punto $x = 4$ in modo che $f(4) = 4$).
7. Sia $f(x)=\begin{cases} 1 & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$, allora la funzione f ammette limite per x tendente a 0 a) solo per $a = 0$ b) per nessun valore di a c) per ogni valore di a d) solo per $a = 1$. La risposta corretta è la c). Infatti il limite esiste ed è 1 (il valore della funzione nell'origine non conta). L'unico valore per cui la funzione è continua è $a = 1$.
8. Quale implicazione è corretta: a) se f è continua allora f è invertibile b) se f è invertibile allora f è continua c) se f è strettamente crescente allora f è invertibile d) se f è invertibile allora f è monotona. L'implicazione corretta è la c). Infatti non esiste alcuna relazione tra continuità e invertibilità per cui a) e b) sono errate. Per quanto riguarda c), essa è sicuramente vera. Invece, contrariamente a quanto si possa pensare a prima vista, d) è falsa. Come controesempio si consideri la seguente funzione: $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 3-x & 1<x<2 \end{cases}$. Il grafico della funzione è il seguente:



e si vede che la funzione è invertibile ma non monotona.
9. Sia $f(x)=\begin{cases} a-2x & -2\leq x\leq 0 \\ 2a-4 & 0<x\leq 4 \end{cases}$. Per quali valori di a la funzione verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass? a) $a = 4$ b) $a = 2$ c) nessun valore di a d) $a = 0$. La risposta corretta è a). Infatti la funzione è definita su un intervallo chiuso e limitato [-2, 4] e quindi manca solo l'ipotesi che essa sia continua. Poiché $\lim_{x\to 0^-} f(x)=a$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)=2a-4$ (la funzione è costante per i valori maggiori di zero) deve essere $a=2a-4$ cioè $a = 4$.

Lezione 21

Questa lezione introduce il concetto di derivata, sicuramente uno delle idee più importanti di tutta l'analisi matematica.

Il rapporto incrementale (pendenza media)

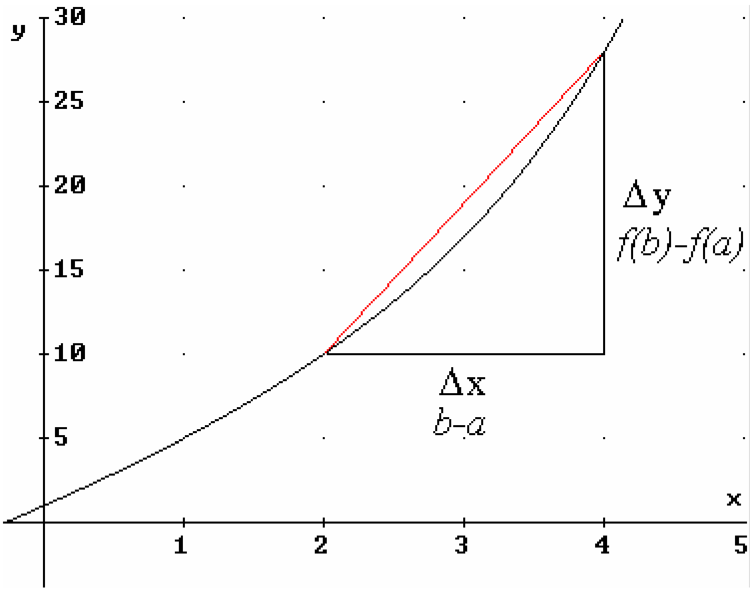
DEFINIZIONE: si definisce *pendenza media* della funzione *f* nell'intervallo [*a*, *b*] il rapporto

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

La pendenza media di una funzione in un intervallo è quindi uguale al rapporto tra la variazione della funzione $f(b)-f(a)$ e la variazione della variabile indipendente, $b-a$.

ESEMPIO: si consideri la funzione $f(x)=2^x+3x$ nell'intervallo [2, 4]. La sua pendenza media è:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(2^4+3\cdot 4)-(2^2+3\cdot 2)}{4-2}=\frac{16+12-4-6}{2}=9$$



Nel disegno sono stati introdotti i simboli Δ*x* e Δ*y* per indicare le variazioni della variabile indipendente e della funzione. La pendenza media, quindi, è uguale al coefficiente angolare della corda che passa per i punti (*a*, *f*(*a*)) e (*b*, *f*(*b*)).

OSSERVAZIONE: di solito nel linguaggio comune ci si riferisce alla pendenza media di una funzione con il termine di "variazione media" della funzione stessa.

OSSERVAZIONE: il rapporto Δ*x*/Δ*y* (che corrisponde alla pendenza media) si chiama rapporto incrementale.

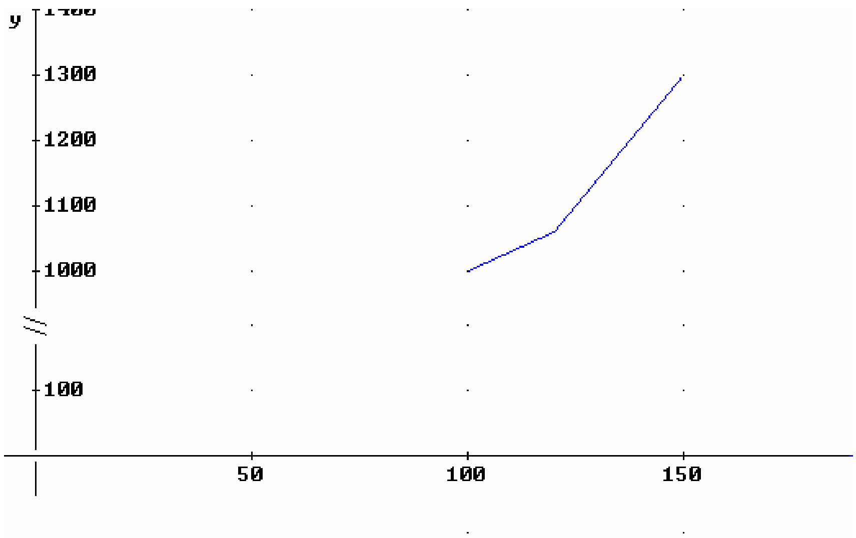
ESEMPIO: un'automobile parte dal km. 150 di una strada alle 14.00 e raggiunge il km. 300 alle 16.00. La pendenza media della funzione che rappresenta lo spazio in funzione del tempo è $\frac{300-150}{16.00-14.00}\frac{km}{h}=75\,\text{km/h}$, ed è convenzionalmente indicata con il termine di "velocità media nel percorso". Anche se non sappiamo come si è svolto il viaggio, possiamo supporre che l'automobile sia andata alla velocità costante di 75 km/h.

ESEMPIO: il costo per produrre 100 unità di un bene è di 1000 euro. Se la produzione passa a 150 unità il costo aumenta a 1300 euro. La pendenza media della funzione che rappresenta il costo in funzione delle unità prodotte è $\frac{1300-1000}{150-100}\frac{euro}{unità} = 6\,\text{euro/unità}$. In altre parole, si può pensare che ogni unità prodotta in più oltre alle 100 abbia determinato un costo aggiuntivo di 6 euro.

La derivata

Negli esempi che abbiamo fatto risulta evidente che le informazioni fornite non sono sufficienti a dare una descrizione dettagliata dei fenomeni. Ad esempio, nell'esempio dell'automobile è improbabile che essa abbia viaggiato costantemente alla velocità di 75 km/h: con tutta probabilità essa avrà viaggiato per certi periodi a velocità superiori e per certi periodi a velocità inferiori. Allo stesso modo, nell'esempio dei costi di produzione, la variazione di costi potrebbe essere stata minore di 6 euro per le prime unità di prodotto mentre, ad esempio, dalla 20esima unità in poi potrebbe essere stata maggiore di 6 euro (probabilmente per l'acquisto di una nuova macchina per la produzione).
Se però le misurazioni fossero state più frequenti la situazione si sarebbe chiarita. Ad esempio, nel caso dei costi di produzione avremmo potuto costruire la seguente tabella:

	Unità prodotte x	Costi sostenuti $f(x)$
1	100	1000
2	110	1030
3	120	1060
4	130	1140
5	140	1220
6	150	1300



Come si vede calcolando le pendenze medie per gli intervalli [100, 110], [110, 120], ecc. si nota che per i primi 2 intervalli la pendenza è costante e uguale a 3 euro/unità, mentre dopo la pendenza è ancora costante ma uguale a 8 euro/unità. Si osservi che la pendenza media su tutto l'intervallo [100, 130] *non* è la media delle due pendenze (che è 5.5 euro/unità)

OSSERVAZIONE: la pendenza media in un intervallo *non* è la media delle pendenze medie nei suoi sottointervalli.

Un dato più significativo si ha quindi se riduciamo l'ampiezza degli intervalli. Si arriva così al concetto di derivata di una funzione.

DEFINIZIONE: sia f una funzione definita in un intervallo (a, b) e sia $a < x_0 < b$. Si diche che f è derivabile in x_0 se esiste finito il numero $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Tale numero si chiama *derivata* della funzione f nel punto x_0 e si indica con il simbolo $f'(x_0)$.

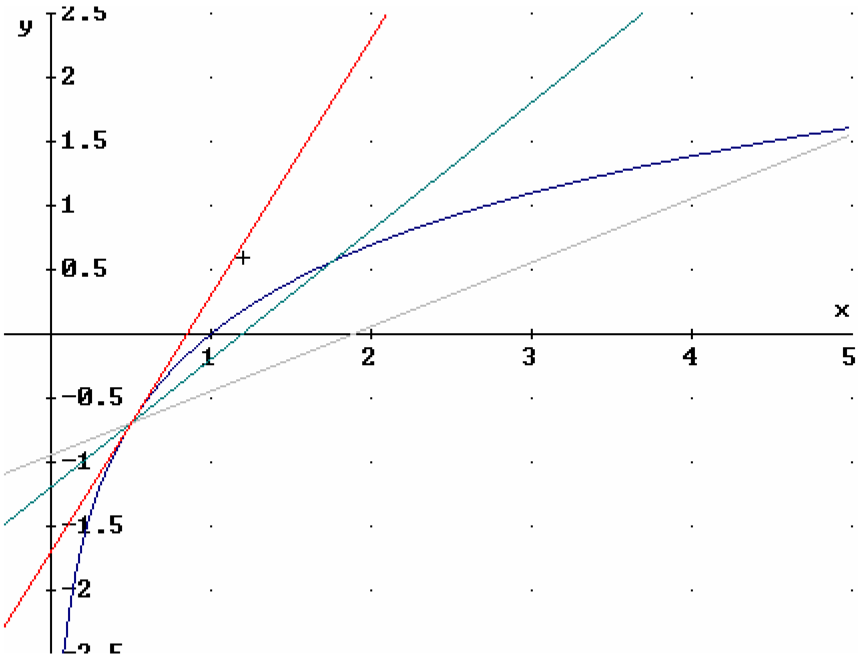
OSSERVAZIONE: la derivata di una funzione è un limite e quindi è anch'essa, come la continuità, un concetto locale.

OSSERVAZIONE: la derivata di una funzione si può indicare alternativamente in uno dei modi seguenti:

- $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (se usiamo la notazione introdotta all'inizio della lezione)
- $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (se poniamo $x = x_0 + h$)

Essa si presenta sempre come una forma indeterminata del tipo 0/0 perché al tendere a zero di Δx anche Δy tende a zero.

OSSERVAZIONE: se ritorniamo all'interpretazione geometrica della pendenza media (il coefficiente angolare della corda) vediamo che il significato geometrico della derivata è quello di coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto x_0.



La curva f è disegnata in blu; la retta tangente in rosso.

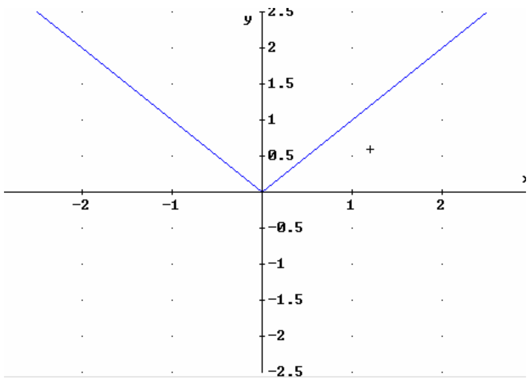
DEFINIZIONE: si chiama retta tangente ad una curva in un punto x_0 la retta che passa per il punto ed ha come coefficiente angolare la derivata della funzione in quel punto. La retta tangente ha equazione: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
OSSERVAZIONE: per le funzioni lineari la derivata coincide con il coefficiente angolare della retta (e la retta tangente coincide con la funzione). Tali funzioni hanno infatti "pendenza costante". In particolare, tutte le rette orizzontali hanno pendenza 0.

DEFINIZIONE: si chiama *derivata destra* di una funzione *f* in un punto x_0 il limite del rapporto incrementale quando $h \to 0^+$ (analogamente per la *derivata sinistra*).

Punti angolosi

Può darsi che per qualche funzione la derivata non esista in qualche punto.

ESEMPIO: sia data la funzione $f(x) = |x|$ e si voglia calcolare la sua derivata nel punto $x_0 = 0$. Si vuole cioè calcolare il $\lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0}$. Calcoliamo separatamente derivata destra e sinistra. Per $x \to 0^+$ il limite diventa $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$, mentre per $x \to 0^-$ il limite diventa $\lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$, perché per *x* negativi $|x| = -x$. I due limiti sono diversi e quindi il limite *non esiste*. La funzione quindi non è derivabile nell'origine. La situazione è rappresentata dal grafico a fianco. In un certo senso il grafico della funzione non è "liscio" ma presenta, proprio in corrispondenza del punto *x* = 0, un "punto angoloso". La situazione si può presentare anche in altri casi, soprattutto in presenza (ma non necessariamente) di un simbolo di valore assoluto. Il punto angoloso quindi è sinonimo di "cambiamento improvviso di pendenza della curva".



DEFINIZIONE: quando in un punto x_0 esistono la derivata sinistra e destra e sono diverse tra loro, si dice che il punto è *angoloso*.

Esercizi

1. Trovare la pendenza media della funzione $f(x) = 3x^2 - \sqrt{x}$ nell'intervallo [4, 9].
2. Scrivere il rapporto incrementale della funzione $f(x) = \frac{x^3 + \ln x}{x}$ nel punto *x* = 2.
3. Calcolare, in base alla definizione, la derivata della funzione $f(x) = x^2$ nel punto di ascissa 3 e scrivere la retta tangente alla curva nel medesimo punto.
4. Calcolare, in base alla definizione, la derivata della funzione $f(x) = x^2 + |x|$ nel punto di ascissa 0 e scrivere la retta tangente alla curva nel medesimo punto.
5. Il reddito *x* è tassato con l'aliquota $a(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 2000 \\ 20\% & 2000 \le x < 3000 \\ 30\% & x \ge 3000 \end{cases}$. La funzione $f(x) = xa(x)$ (imposta dovuta) è: a) lineare b) derivabile c) continua d) crescente

Soluzioni

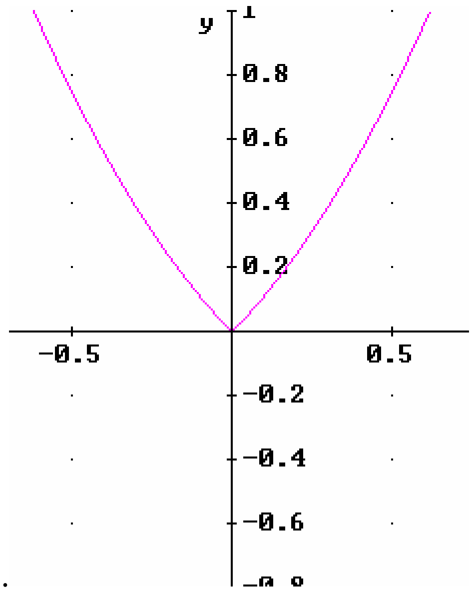
1. Trovare la pendenza media della funzione $f(x) = 3x^2 - \sqrt{x}$ nell'intervallo [4, 9]. La pendenza media è data da $\dfrac{\left(3\cdot 81-\sqrt{9}\right)-\left(3\cdot 16-\sqrt{4}\right)}{9-4} = \dfrac{243-3-48+2}{5} = \dfrac{194}{5} = 38.8$

2. Scrivere il rapporto incrementale della funzione $f(x) = \dfrac{x^3+\ln x}{x}$ nel punto $x_0 = 2$. Il rapporto incrementale è dato da $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\dfrac{x^3+\ln x}{x}-\dfrac{8+\ln 2}{2}}{x-2}$

3. Calcolare, in base alla definizione, la derivata della funzione $f(x) = x^2$ nel punto di ascissa 3 e scrivere la retta tangente alla curva nel medesimo punto. Il rapporto incrementale, $x_0 = 3$, è $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{x^2-9}{x-3}$. La derivata è $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} x+3 = 6$. La retta tangente è $y-9 = 6(x-3)$, cioè $y = 6x-9$

4. Mostrare che, in base alla definizione, la derivata della funzione $f(x) = x^2 + |x|$ nel punto di ascissa 0 non esiste. Si ha $x_0 = 0$ e $f(x_0) = f(0) = 0$. Allora dobbiamo calcolare $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+|x|}{x}$.

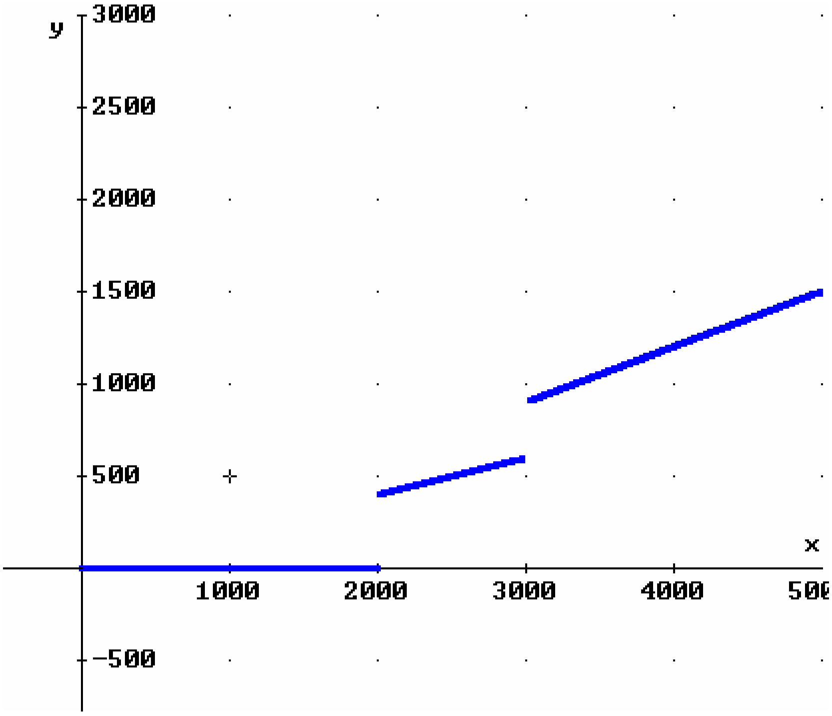
   Poiché $x \to 0$, x^2 è trascurabile rispetto a x e a $|x|$. Pertanto $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+|x|}{x} \sim \dfrac{|x|}{x}$ che come abbiamo visto nella lezione ha due valori diversi a seconda che ci avviciniamo a 0^+ o a 0^-. L'origine è quindi un punto angoloso. Il grafico della funzione è mostrato in figura



.

5. Il reddito x è tassato con l'aliquota $a(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 2000 \\ 20\% & 2000 \le x < 3000 \\ 30\% & x \ge 3000 \end{cases}$. La funzione $f(x) = xa(x)$ (imposta dovuta) è: a) lineare b) derivabile c) continua d) crescente. La risposta corretta è d).

Infatti, l'espressione analitica di f è $f(x)=\begin{cases} 0 & 0 \le x < 2000 \\ 0.2x & 2000 \le x < 3000 \\ 0.3x & x \ge 3000 \end{cases}$ e il suo grafico è rappresentato dalla linea blu in figura.



Si tratta quindi di una funzione non continua, non lineare, non derivabile e crescente.

Lezioni 22-23-24

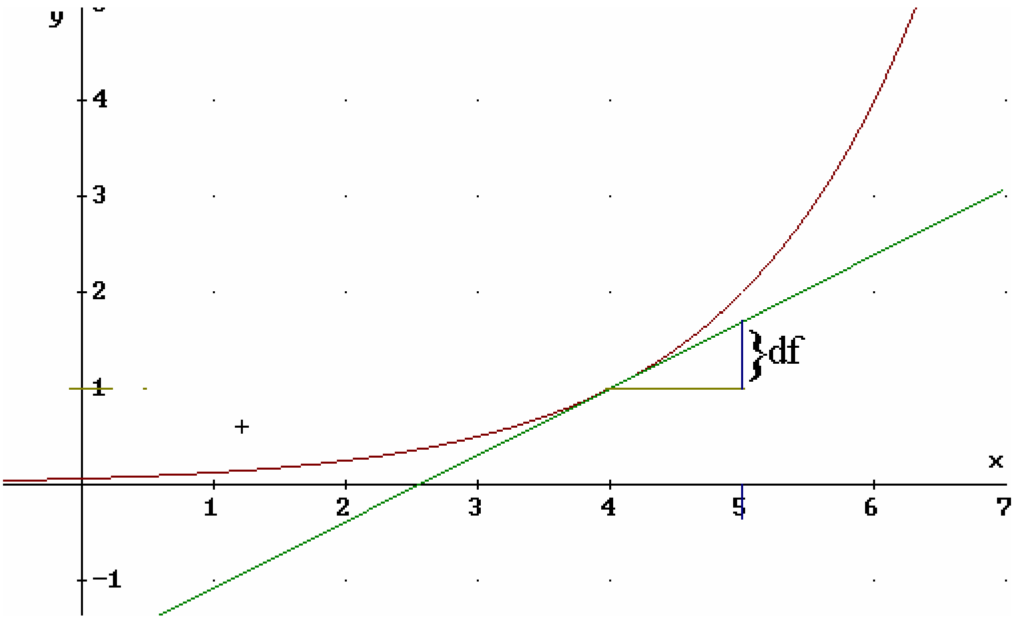
Differenziale

Nell'intorno del punto di tangenza ad una curva, la curva stessa può essere approssimata geometricamente e numericamente dalla retta tangente. Ad esempio, se consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ nel suo punto di ascissa 3, la retta tangente è $y = 6x - 9$. Nel punto di ascissa 3 le due linee (la parabola e la retta tangente) coincidono e valgono entrambe 9. Se prendiamo un valore vicino a 3, per esempio 3.001, il valore della funzione si sposta a 9.006001, mentre il valore approssimato fornito dalla retta tangente è 9.006. L'errore che si compie calcolando la funzione utilizzando la retta tangente è quindi molto piccolo, trascurabile rispetto a 0.001 che rappresenta lo spostamento dal punto 3.
L'idea che sta dietro a questo ragionamento è la seguente. Per la parabola io posso descrivere l'incremento della funzione come una somma di due termini, uno lineare (che corrisponde alla retta tangente) e uno non lineare (che rende conto della differenza tra la retta e la curva).
In formule, $y - 9 = 6(x-3) + o(x-3)$. L'incremento della funzione è $y - 9$, quello della variabile indipendente è $x - 3$. La formula ci dice che, a meno di termini trascurabili, l'incremento della y è proporzionale a quello della x (il coefficiente di proporzionalità è in questo caso 6).

Questa proprietà, il fatto cioè che l'incremento di una funzione si possa esprimere come prodotto dell'incremento della var. indipendente per un numero a meno di errori trascurabili prende il nome di differenziabilità di una funzione.

DEFINIZIONE: sia f definita in un intervallo (a, b) e sia $a < x_0 < b$. Si dice che f è differenziabile nel punto x_0 se esiste un numero reale $m = m(x_0)$ tale che $f(x) - f(x_0) = m(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$. La quantità $m(x - x_0)$ si dice *differenziale primo* della funzione f nel punto x_0. relativo all'incremento $x - x_0$. Essa si indica con il simbolo df.

ESEMPIO: nella figura è mostrato il differenziale di una funzione nel punto 4 relativo ad un incremento di 1.



Legami tra differenziabilità e derivabilità

I due concetti di derivabilità (esistenza del limite) e differenziabilità (possibilità di approssimare l'incremento della funzione come prodotto di un numero per l'incremento della variabile) sono nelle funzioni reali di variabile reale (cioè nelle funzioni da R a R) intimamente legati. Essi, infatti, sono equivalenti nel senso che:

TEOREMA: un funzione reale di variabile reale è differenziabile in un punto x_0 se e solo se è derivabile nello stesso punto.

Infatti se la funzione è derivabile il numero *m* che appare nella definizione di differenziale è proprio la derivata della funzione. Viceversa, se la funzione è differenziabile, la possibilità di esprimere Δy come multiplo *m*-esimodi Δx è sufficiente per l'esistenza del limite della derivata.

OSSERVAZIONE: la distinzione tra i due concetti è tuttavia utile perché quando le variabili in ingresso sono due o più, i concetti di derivabilità e differenziabilità *non* sono più equivalenti.

Legami tra derivabilità e continuità

OSSERVAZIONE: Una funzione continua non è necessariamente derivabile (essa può infatti avere dei punti angolosi–si pensi alla funzione $|x|$). Una funzione derivabile, invece, deve essere necessariamente continua, come mostra il seguente teorema.

TEOREMA: se *f* è differenziabile in x_0, allora essa è continua in x_0.

DIMOSTRAZIONE: se *f* è differenziabile in x_0 allora esiste un numero *m* per cui vale la relazione $f(x) - f(x_0) = m(x - x_0) + o(x - x_0)$. Se facciamo tendere *x* a x_0 il secondo membro della precedente uguaglianza tende a 0 (perché il secondo addendo è o-piccolo di $x - x_0$). Ma allora $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$, cioè $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ che vuol dire che la funzione *f* è continua nel punto x_0.

Derivate delle funzioni elementari

Il calcolo delle derivate potrebbe in teoria essere svolto sempre in base alla definizione (cioè calcolando il limite del rapporto incrementale). Esistono tuttavia delle regole pratiche per rendere più veloce questo calcolo che esaminiamo rapidamente, riassunte in una tabella.

$f(x)$	$f'(x)$
c (costante)	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$1/x$

OSSERVAZIONE: la regola per la derivazione di una potenza vale per tutti i valori di α (intero relativo o razionale)

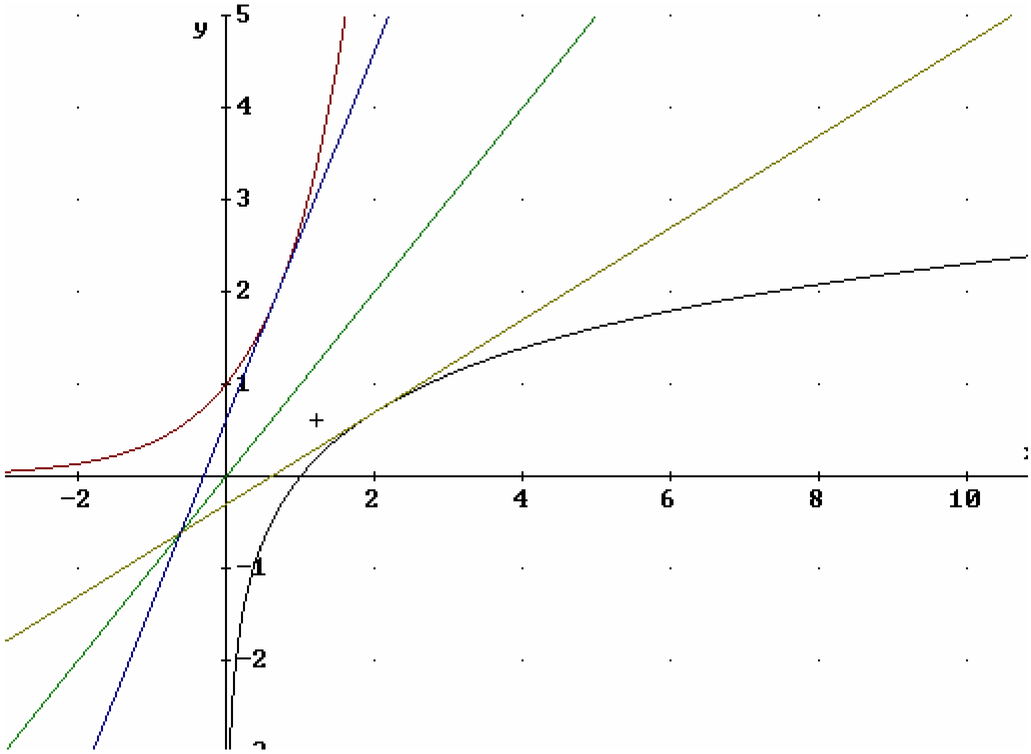
OSSERVAZIONE: le regole nella tabella valgono per qualunque valore di *x* nel dominio della funzione. Esse quindi definiscono, a partire dalla funzione *f*, un'altra funzione *f'*, detta *funzione derivata*. In questo senso, l'operazione di derivazione può essere vista come una "funzione particolare” che associa ad ogni determinata funzioni un’altra funzione (analogamente alle funzioni ordinarie che associano ad ogni numero del dominio un numero del codominio)

Algebra delle derivate

- La derivata del prodotto di una funzione *f* per una costante *c* è: $(cf)' = cf'$
- La derivata della somma di due funzioni *f* e *g* è: $(f+g)' = f' + g'$. La derivata è quindi un operatore lineare (nel senso che rispetta regole analoghe a quelle delle funzioni lineari)
- La derivata del prodotto di due funzioni *f* e *g* è: $(fg)' = f'g + fg'$
- La derivata del quoziente di due funzioni *f* e *g* è: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
- La derivata della funzione composta di due funzioni $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- La derivata della funzione $f^{-1}(y)$ inversa di una funzione *f*(*x*) è: $\left[f^{-1}(y)\right]' = \dfrac{1}{f'(x)}$

OSSERVAZIONE: si faccia attenzione alla derivata della funzione inversa: essa esprime la derivata *in un punto y* della funzione inversa, in funzione della derivata *nel corrispondente punto x* della funzione *f*.

OSSERVAZIONE: il risultato sulle funzioni inverse è abbastanza intuitivo se si tiene conto del fatto che il grafico di una funzione e della sua inversa sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$. Le tangenti ai due grafici devono essere anch’esse simmetriche e quindi i loro coefficienti angolari inversi. In figura sono mostrate le funzioni ln *x* e e^x e due tangenti simmetriche.



ESEMPI:

- Calcolare la derivata di $y = \sqrt{x}$. Poiché $\sqrt{x} = x^{1/2}$, la regola di derivazione ci dice che $y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- Calcolare la derivata di $y = e^x + \ln x$. Per le regole di derivazione si ha $y' = e^x + \frac{1}{x}$
- Calcolare la derivata di $y = (3x^2 + 5x)e^x$. Applichiamo la regola della derivazione del prodotto. Sia $f = 3x^2 + 5x$ e $g = e^x$. Si ha $f' = 6x + 5$ e $g' = e^x$. Allora $y' = (6x+5)e^x + (3x^2 + 5x)e^x = e^x(3x^2 + 11x + 5)$
- Calcolare la derivata di $y = \frac{1+x}{1+x^2}$. Applichiamo la regola della derivazione del quoziente. Sia $f = 1 + x$ e $g = 1 + x^2$. Allora $f' = 1$ e $g' = 2x$. Allora $y' = \frac{1 \cdot (1+x^2) - 2x \cdot (1+x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(1+x^2)^2}$.
- Calcolare la derivata della funzione $y = \sqrt{x^2 + x}$. Si tratta di una funzione composta: $y = \sqrt{f}$ e $f = x^2 + x$. La derivata *y'* è quindi il prodotto delle derivate di *y* fatta rispetto al suo argomento e di *f* fatta rispetto a *x*. $y' = \frac{1}{2\sqrt{f}} \cdot (2x+1) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$
- Sia $f(x) = e^x$. Calcolare la derivata della funzione inversa di *f* usando la regola della funzione inversa. La funzione inversa della *f* è la funzione *g* tale che $g(f(x)) = x$. Applichiamo la regola di derivazione della funzione composta all'uguaglianza. Otteniamo $g'(f(x))f'(x) = 1$ e quindi $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$. Poiché $y = f(x)$ e $f'(x) = f(x) = y$ si ha $g'(y) = \frac{1}{y}$, come doveva essere visto che la funzione inversa dell'esponenziale è il logaritmo naturale
- Sia $f(x) = \frac{1+2x}{3x-1}$. Calcolare $(f^{-1})'(1)$. Troviamo prima la funzione inversa ponendo $y = \frac{1+2x}{3x-1}$ e risolvendo rispetto a *x*. Si ottiene $x = \frac{1+y}{3y-2}$. La funzione inversa è quindi $f^{-1}(x) = \frac{1+x}{3x-2}$. La sua derivata è $(f^{-1})' = -\frac{5}{(3x-2)^2}$ e nel punto di ascissa 1 vale –5. Si poteva arrivare al risultato anche osservando che *f*(2) = 1. Allora la derivata richiesta è l'inverso della derivata della funzione *f* nel punto di ascissa 2. Poiché la derivata di *f* è $f' = -\frac{5}{(3x-1)^2}$ nel punto di ascissa 2 vale –1/5; il suo inverso è proprio –5.
- Calcolare il differenziale della funzione $y = \ln(1+x)$ nel punto di ascissa $x_0 = 2$ per un incremento *h* = 0.01. Poiché si ha $y' = \frac{1}{1+x}$ la derivata della funzione nel punto x_0 è $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ e il differenziale di *y* è d$y = f'(x_0) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 0.01 \approx 0{,}00333$. Poiché $y(2) = \ln 3 = 1{,}098612288$, ci aspettiamo che $y(2.01) \approx \ln 3 + 0.003333333 = 1.098612288 + 0.003333333 = 1{,}101945621$. In effetti il valore esatto è 1,101940078 con un errore di 0,000005543 trascurabile rispetto a *h*.

Lezioni 25-26

Il concetto di derivata trova importanti applicazioni in economia. In alcuni casi, soprattutto per motivi di tradizione, la terminologia è diversa da quella dell'analisi matematica.

Funzioni marginali

In generale, quando una funzione è una grandezza economica, la sua derivata si indica con l'aggettivo *marginale*.

DEFINIZIONE: Supponiamo che un impresa, per produrre una certa quantità q di merce, sostenga un costo $C(q)$. Se l'impresa passa dalla produzione q_0 alla produzione q, il costo passa da $C(q_0)$ a $C(q)$. Il rapporto $\frac{C(q)-C(q_0)}{q-q_0}$ si chiama *tasso medio di variazione dei costi*. Esso, analogamente alla velocità media, rappresenta un dato medio calcolato su *tutta* la variazione.

DEFINIZIONE: La variazione di costo in relazione ad una variazione "infinitesima" di quantità prodotta, cioè la derivata di C rispetto a q, si chiama *costo marginale*. In alcuni contesti, poiché non ha senso parlare di variazione infinitesima di quantità prodotta (per esempio per beni prodotti in quantità discrete), si dice che il costo marginale è il costo sostenuto per aumentare di *una unità* la produzione.

Analogamente al caso del costo marginale, si definisce il *ricavo marginale* (cioè il ricavo ottenuto per la variazione di una unità di quantità prodotta) oppure come derivata del ricavo rispetto alla quantità.

DEFINIZIONE: si definisce *costo unitario* (o costo medio) il rapporto fra il costo totale sostenuto per produrre una quantità q e la quantità q. In formule, $C_u = \frac{C(q)}{q}$.

ESEMPI: Un'impresa sostiene mensilmente i seguenti costi:

- un costo fisso mensile di 10000 euro
- un costo di 16 euro per ogni unità prodotta
- una spesa per la manutenzione degli impianti pari al 4% del quadrato della quantità prodotta

Determinare il costo totale, il costo unitario ed il costo marginale in funzione della quantità prodotta.

Il costo totale, per una quantità q è $C(q) = 10000 + 16q + 0.04q^2$ e il costo unitario è $C_u(q) = \frac{10000+16q+0.04q^2}{q} = \frac{10000}{q} + 16 + 0.04q$. Come si vede il costo unitario è composto in questo caso da un costo fisso decrescente rispetto alla quantità (10000/q) e da un costo variabile crescente rispetto alla quantità q (16+0.04q).

Il costo marginale è la derivata del costo totale rispetto a q. $C_m(q) = 16 + 0.08q$.

Rapporti tra costo marginale e costo medio

Il costo medio è definito dalla relazione $C_m(q) = \frac{C(q)}{q}$. Se calcoliamo la derivata del costo medio otteniamo $C_m{}'(q) = \frac{C'(q)q - C(q)}{q^2}$.

OSSERVAZIONE: quando il costo medio è uguale al costo marginale, cioè quando $\frac{C(q)}{q} = C'(q)$, la derivata del costo medio è nulla. Inoltre, poiché si può scrivere $C_m{}'(q) = \frac{C'(q)q - C(q)}{q^2} = \frac{1}{q}\left(\frac{C'(q)q - C(q)}{q}\right) = \frac{1}{q}\left(C'(q) - \frac{C(q)}{q}\right)$ si hanno le seguenti relazioni:

- se $C'(q) > \frac{C(q)}{q}$ allora $C_m{}'(q) > 0$
- se $C'(q) < \frac{C(q)}{q}$ allora $C_m{}'(q) < 0$

Ritorneremo su queste relazioni più avanti nel corso.

Elasticità

La derivata di una funzione dà la velocità di variazione di una grandezza in funzione di un'altra in senso assoluto. Tuttavia la derivata rappresenta la variazione media assoluta. Per esempio, un costo marginale di 10 euro significa che la produzione di un'unità in più di un bene costa 10 euro. Ma per capire bene che cosa vuol dire questo, dovremmo sapere qual è il costo totale: se il costo totale fosse 1000 euro, il costo marginale sarebbe l'1% del costo totale; se il costo totale fosse 100 euro, il costo marginale sarebbe il 10% del costo totale.
Inoltre, le derivate misurano variazioni di grandezze *con unità di misura*, mentre le percentuali sono senza unità.
Per rispondere a questi problemi è stato introdotto il concetto di elasticità.

Partiamo dal considerare, invece che le variazioni assolute, le variazioni percentuali (cioè i rapporti tra le variazioni e i valori iniziali). Il rapporto degli incrementi percentuali prende la forma $\frac{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{h}{x_0}} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{f(x_0)} \cdot \frac{x_0}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}$ cioè il rapporto incrementale moltiplicato per $\frac{x_0}{f(x_0)}$.

DEFINIZIONE: La grandezza $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}$ prende il nome di *elasticità d'arco* di una funzione f nel punto x_0 relativamente ad un incremento h.

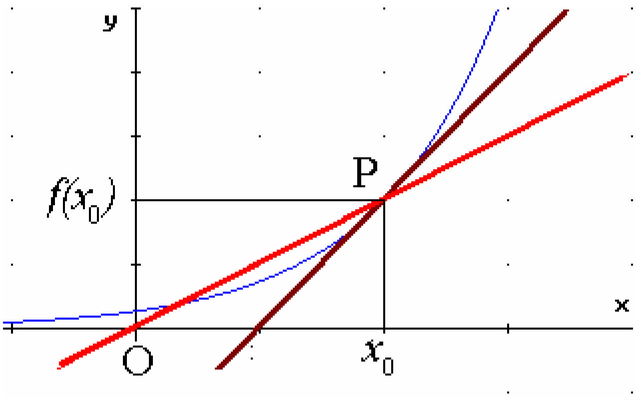
Passando al limite per h tendente a 0 si passa all'elasticità puntuale.

DEFINIZIONE: si chiama *elasticità puntuale* di una funzione f nel punto x_0 e si indica con il simbolo $E_f(x_0)$ il prodotto $f'(x_0) \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}$. L'elasticità puntuale si può anche riscrivere come $E_f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{\frac{f(x_0)}{x_0}}$ che è più significativa perché esprime l'elasticità come rapporto tra il valore marginale e il valore medio unitario.

DEFINIZIONE: una funzione si dice:

- elastica se $\left|E_f\left(x_0\right)\right|>1$ (e allora variazioni di x provocano variazioni percentuali maggiori di $f(x)$)
- inelastica se $\left|E_f\left(x_0\right)\right|<1$ (e allora variazioni di x provocano variazioni percentuali minori di $f(x)$)
- anelastica se $\left|E_f\left(x_0\right)\right|=1$

La definizione di elasticità ha un immediato significato geometrico. Sia $f(x)$ una funzione derivabile e sia $P(x_0, f(x_0))$ un suo punto. Allora la retta che passa per il punto P e l'origine ha come coefficiente angolare $\dfrac{f\left(x_0\right)}{x_0}$. Se la funzione è elastica in x_0 allora $E_f\left(x_0\right)=\dfrac{f'\left(x_0\right)}{\dfrac{f\left(x_0\right)}{x_0}}>1$ cioè $f'\left(x_0\right)>\dfrac{f\left(x_0\right)}{x_0}$ e quindi la pendenza della curva è superiore a quella della retta PO. Se la funzione è inelastica è minore. Se è anelastica la tangente *passa* per l'origine. Nel grafico seguente in rosso la retta PO e in marrone la tangente alla curva. La curva è elastica.



ESEMPIO: l'elasticità della funzione $y = x^k$ è $E_f\left(x_0\right)=\dfrac{f'\left(x_0\right)}{\dfrac{f\left(x_0\right)}{x_0}}=\dfrac{kx^{k-1}}{\dfrac{x^k}{x}}=k$. Le funzioni potenza hanno quindi elasticità costante uguale all'esponente.

OSSERVAZIONE: calcoliamo l'elasticità della funzione $C(q)$, costo in funzione della quantità. Essa è $\dfrac{q}{C(q)}C'(q)$, oppure $\dfrac{C'(q)}{\dfrac{C(q)}{q}}$ cioè il rapporto tra costo marginale e costo medio. Quindi, se il costo marginale è uguale al costo medio l'elasticità del costo è 1.

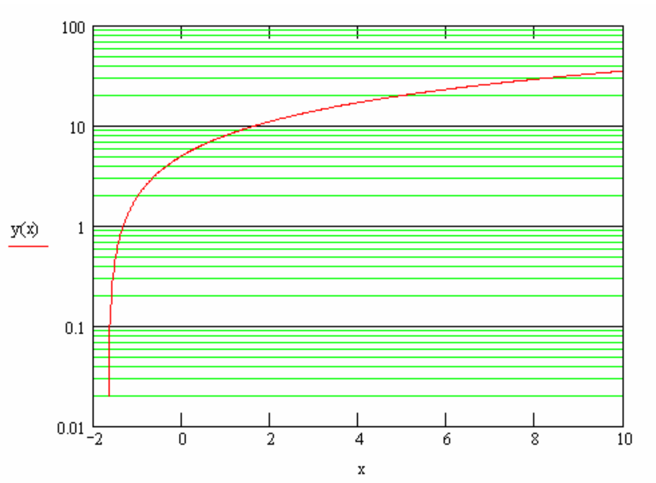
OSSERVAZIONE: riassumendo, quando il costo marginale è uguale al costo medio la derivata del costo medio è 0 e l'elasticità è 1.

Grafici in scala logaritmica

Esiste un legame tra i grafici in scala logaritmica e l'elasticità.

DEFINIZIONE: un grafico in scala semilogaritmica è un grafico in cui in uno dei due assi (di solito l'asse y) è rappresentata il logaritmo (di solito in base 10) della variabile.

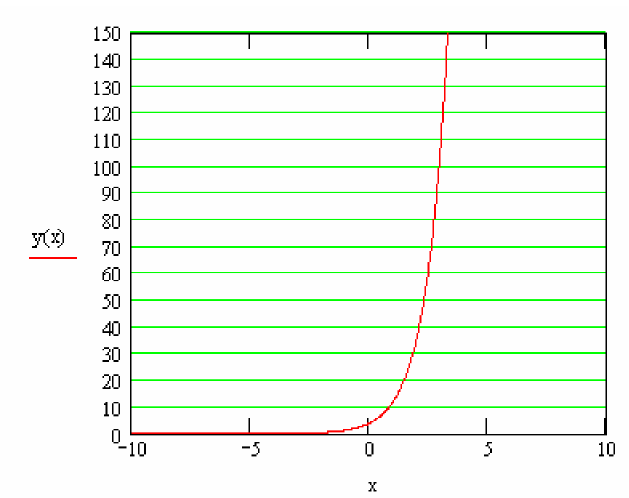
ESEMPIO: vogliamo rappresentare la retta $y = 3x + 5$ in scala semilogaritmica. Vogliamo quindi rappresentare non y ma $\log_{10} y$. Il grafico risultante è

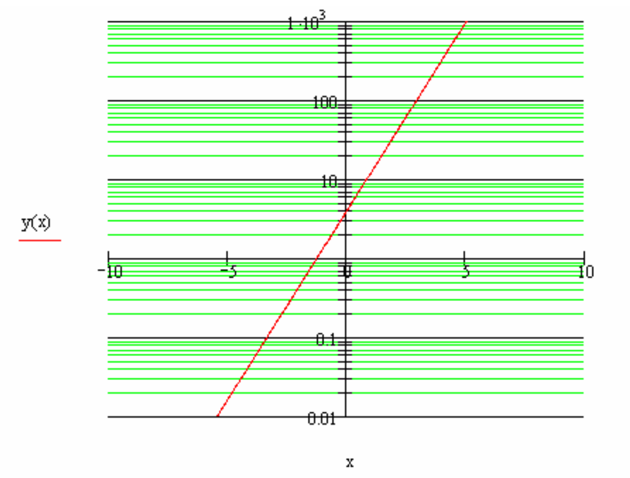


Naturalmente il grafico non risulta più quello di una retta ma di una curva logaritmica. Sull'asse y al posto dei numeri –2, –1, 0, 1, 2 sono rappresentate le potenze di 10.

I grafici in scala semilogaritmica servono soprattutto per leggere meglio i grafici di funzioni che hanno crescita molto rapida.

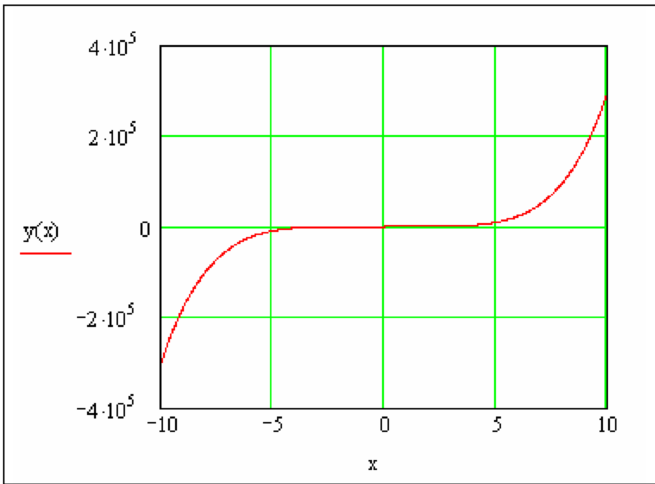
ESEMPIO: tracciare il grafico di $y = 4 \cdot 3^x$ in scala normale e in scala semilogaritmica. I due grafici sono rappresentati di seguito.

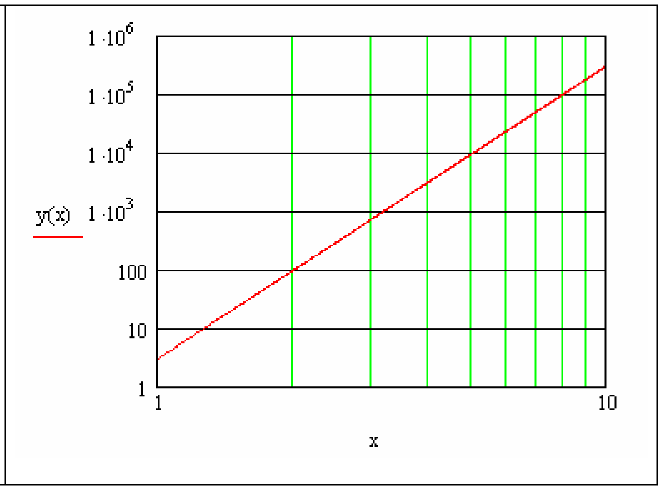




DEFINIZIONE: un grafico in scala logaritmica è un grafico in cui in *entrambi* gli assi sono rappresentati i logaritmi delle variabili (di solito in base 10).

ESEMPIO: se consideriamo la funzione $y = ax^k$ e la rappresentiamo in scala logaritmica otteniamo una retta. Infatti, calcolando il logaritmo in base 10 di entrambi i membri dell'equazione che definisce la funzione abbiamo $\ln y = \ln a + k \ln x$, che, nelle variabili $\ln y$ e $\ln x$ è una retta. I due grafici (quello "normale" e quello in scala logaritmica) sono rappresentati di seguito.





Derivata logaritmica o semielasticità

DEFINIZIONE: si chiama *derivata logaritmica* di una funzione *f* la derivata del logaritmo della funzione stessa: $\frac{d}{dx}(\ln f) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Essa si chiama anche *semielasticità puntuale* di *f*.

OSSERVAZIONE: la derivata logaritmica si presenta come rapporto tra la derivata di *f* ed *f*. Essa ha quindi il significato *tasso di incremento relativo* di *f* rispetto ad *x*.

OSSERVAZIONE: poiché la derivata logaritmica di *f* è la derivata del logaritmo di *f* essa rappresenta anche il coefficiente angolare della tangente al grafico di ln *f*. Quindi, la pendenza del grafico in scala semilogaritmica è la semielasticità.

TEOREMA: la pendenza del grafico in scala logaritmica coincide con l'elasticità.

Applicazioni

ESEMPIO: sia $d = 10000 - 20p$ la domanda di un certo bene in funzione del prezzo *p* ($0 < p < 500$). Calcolare l'elasticità d'arco e puntuale in p_1 per una variazione di prezzi da $p_1 = 200$ a $p_2 = 350$. Calcolare l'elasticità puntuale in p_2.

L'elasticità d'arco in p_1 è data dalla relazione $\frac{p}{d} \cdot \frac{\Delta d}{\Delta p}$ ed è uguale a $\frac{200}{6000} \cdot \frac{3000 - 6000}{350 - 200} = -\frac{2}{3}$ che è in modulo minore di 1: la domanda è quindi anelastica in p_1. Una domanda anelastica significa che a variazioni relative di prezzo seguono variazioni relativa della domanda *minori*: questo comportamento è tipico dei beni di prima necessità (quelli per cui, anche se varia il prezzo, non varia molto la domanda, proprio perché di prima necessità). L'elasticità puntuale in p_1 è data da $\frac{p}{d} \cdot d'$ ed è uguale a $\frac{200}{6000}(-20) = -\frac{2}{3}$ (coincidente con l'elasticità d'arco – si tratta di un caso particolare per le funzioni di domanda lineari).

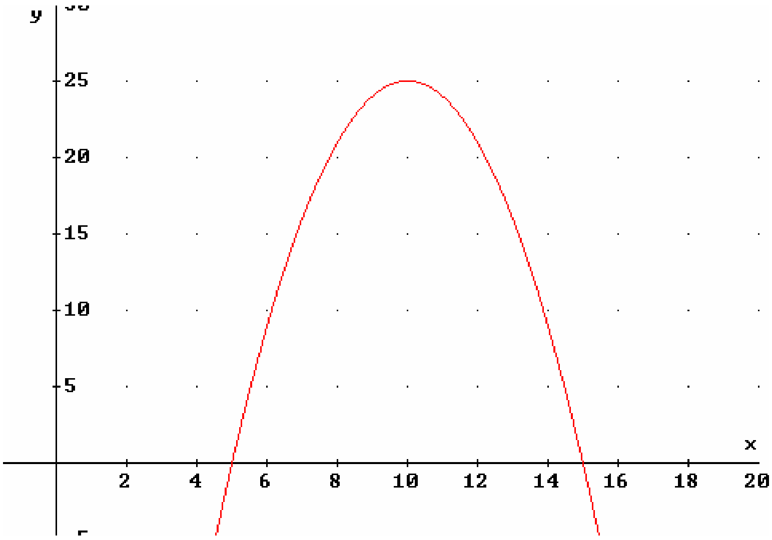
L'elasticità puntuale in p_2 è data da $\frac{p}{d} \cdot d'$ ed è uguale a $\frac{350}{3000}(-20) = -\frac{7}{3}$ ed è in modulo maggiore di 1: la domanda è quindi elastica in p_2. Questo fenomeno è tipico dei beni voluttuari.

Esercizi

1. La domanda e l'offerta di un bene sono espresse dalle funzioni $d = 300 - 10p$ e $o = -20 + 6p$. Determinare il prezzo di equilibrio in condizioni di concorrenza perfetta e l'elasticità della domanda e dell'offerta nel punto di equilibrio.
2. Il costo totale di produzione di una certa merce, in funzione della quantità prodotta q, $q > 0$, è descritto dalla funzione $C(q) = 4q^2 + q + 900$. Scrivere l'espressione del costo medio per unità di prodotto $M(q) = \frac{C(q)}{q}$ e calcolare il punto q_0 in cui $M(q)$ assume valore minimo. Calcolare in q_0 l'elasticità della funzione $C(q)$.
3. I costi di produzione di un'azienda in funzione della quantità prodotta q sono determinati dalla funzione $C(q) = 75 + 2q$, mentre i ricavi sono stabiliti dalla funzione $R(q) = 22q - q^2$. Determinare l'intervallo (q_1, q_2) per cui il profitto risulta positivo. Determinare per quale valore q^* di quantità prodotta si ha il massimo profitto e verificare che risulta $R'(q^*) = \frac{R(q_2) - R(q_1)}{q_2 - q_1}$
4. Data la funzione $f(x) = x^2 e^{-3x}$ definita per $x > 0$, scrivere la funzione elasticità $E_f(x)$ e determinare in quale intervallo la funzione f è elastica.

Soluzioni

1. Il prezzo di equilibrio si ottiene uguagliando domanda e offerta, cioè risolvendo il sistema $300-10p=-20+6p$. La soluzione è $p = 20$. Per questo prezzo, domanda ed offerta sono uguali a 100. L'elasticità della domanda in $p = 20$ è $\frac{p}{d}d'$ cioè $\frac{20}{100}(-10)=-2$. L'elasticità dell'offerta in $p = 20$ è $\frac{p}{o}o'$ cioè $\frac{20}{100}6=1.2$. La domanda e l'offerta sono entrambe elastiche.
2. Il costo medio per unità di prodotto è $M(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{4q^2+q+900}{q}=4q+1+\frac{900}{q}$. Il punto q_0 in cui $M(q)$ assume valore minimo si ottiene (vedi lezioni seguenti) uguagliando a 0 $M'(q)$. Poiché $M'(q)=4-\frac{900}{q^2}$, risolvendo l'equazione $M'(q)=4-\frac{900}{q^2}=0$ si ottiene $q_0 = 15$ (la soluzione negativa non ha significato). L'elasticità del costo nel punto q_0 è uguale a $\frac{q_0}{C(q_0)}C'(q_0)=\frac{q_0}{4q_0{}^2+q_0+900}(8q_0+1)=\frac{15}{1815}121=1$.
3. Il profitto è uguale a $P(q)=R(q)-C(q)$ (ricavi meno costi). Quindi $P(q)=-q^2+20q-75$. Esso è rappresentato da una parabola



ed è positivo per $5 < x < 15$. Il profitto è massimo nel vertice ($x = 10$) e vale 25. Si ha $R(q_1) = 85$ e $R(q_2) = 105$. Si ha $\frac{R(q_2)-R(q_1)}{q_2-q_1}=\frac{105-85}{15-5}=\frac{20}{10}=2$. e $R'(q^*)=22-2q^*=22-2\cdot 10=2$

4. L'elasticità di f è data da $\frac{x}{f(x)}f'(x)=\frac{x}{x^2e^{-3x}}\left(2xe^{-3x}-3x^2e^{-3x}\right)=2-3x$. Perché sia maggiore di 1 occorre che $2-3x>1$ cioè $0 < x < 1/3$ (ricordando che x è definita solo per $x > 0$).

Lezione 27-28

Teorema di Fermat

Il teorema di Fermat fornisce un'utile caratterizzazione dei punti di massimo e minimo per le funzioni derivabili.

TEOREMA (di Fermat): se una funzione *f* ammette un punto di massimo o di minimo relativo in un punto x_0 interno all'intervallo (a, b) e se in quel punto esiste la derivata prima, allora $f'(x_0) = 0$, cioè il punto è a tangente orizzontale (o stazionario).

DIMOSTRAZIONE: supponiamo che il punto x_0 sia di massimo (la dimostrazione per il caso di minimo è analoga). Allora, per valori di *h* abbastanza vicini a 0, $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$ (perché il punto è di massimo).
Scriviamo la derivata destra della funzione *f* secondo la definizione: $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Il numeratore di questa frazione è negativo o nullo, mentre il denominatore è sicuramente positivo. Quindi, per la regola dei segni, la frazione avrà segno negativo o nullo. Il suo limite (che esiste perché la funzione è derivabile), per il teorema della permanenza del segno, sarà negativo o nullo.
Se consideriamo ora la derivata sinistra abbiamo $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Il numeratore di questa frazione è negativo o nullo, mentre il denominatore è sicuramente negativo. Quindi, per la regola dei segni, la frazione avrà segno positivo o nullo. Il suo limite (che esiste perché la funzione è derivabile), per il teorema della permanenza del segno, sarà negativo o nullo.
Derivata destra e sinistra quindi sono rispettivamente un valore negativo o nullo o un valore positivo o nullo. Poiché la funzione è derivabile esse devono coincidere e quindi l'unica possibilità è che entrambe siano nulle.

OSSERVAZIONE: il teorema fornisce quindi una condizione "necessaria" per l'esistenza di un massimo o un minimo per funzioni derivabili. In altre parole, se la funzione è derivabile ed ha un massimo (o un minimo) la sua derivata in quel punto è sicuramente uguale a 0. La condizione, però. non è sufficiente, cioè non basta che la derivata sia 0 perché la funzione abbia un punto di massimo o di minimo. Per esempio, la funzione $f(x) = x^3$ nell'origine ha derivata nulla ma l'origine non è un punto di massimo né di minimo.

OSSERVAZIONE: l'intervallo (a, b) che compare nell'enunciato del teorema deve essere necessariamente aperto (senza gli estremi). Se fossero inclusi gli estremi, allora la conclusione del teorema potrebbe non essere vera. Si pensi, come contro esempio, alla funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[1, 2]$. Essa ha un minimo in $x = 1$ e un massimo in $x = 2$, ma in nessuno di questi due punti la derivata si annulla.

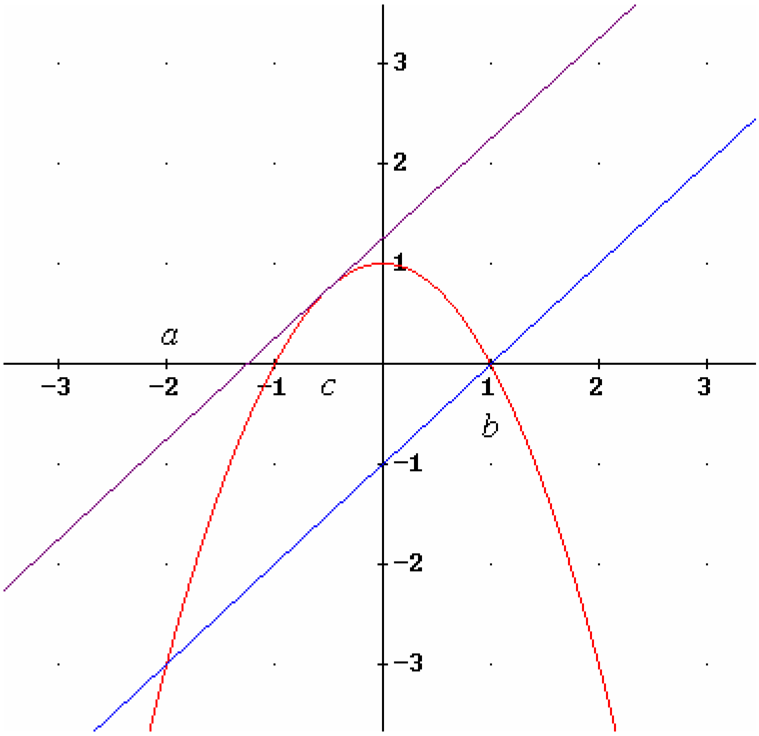
Siamo ora in grado di approfondire quanto detto nella lezione precedente sui rapporti tra costo medio e costo marginale. Poiche il costo medio è $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$, se *C* è una funzione derivabile (come è nei casi più semplici) il costo medio è anch'esso derivabile e la sua derivata è $C_m'(x) = \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2}$ e si annulla quando $C'(x_0) \cdot x_0 = C(x_0)$ cioè $C'(x_0) = \frac{C(x_0)}{x_0}$. Nel punto di minimo, quindi, il costo marginale uguaglia il costo medio. Lo stesso concetto si può esprimere in termini di elasticità: poiché l'elasticità di $C(x)$ è data da $\frac{xC'(x)}{C(x)}$ nel punto di minimo l'elasticità è uguale a 1.

Teorema di Lagrange o del valore medio

Se viaggiamo per 2 ore e percorriamo 150 km la nostra velocità media sarà stata di 75 km/h (in altre parole la pendenza media della funzione che rappresenta lo spazio in funzione del tempo sarà di 75 km/h). Durante il percorso ci saranno stati dei momenti in cui abbiamo viaggiato più veloce di 75 km/h e momenti in cui abbiamo viaggiato più lentamente, ma non può essere che siamo stati costantemente più veloci di 75 km/h o più lenti. Sicuramente, quindi, per almeno un istante del viaggio abbiamo dovuto viaggiare alla velocità di 75 km/h.
Il teorema di Lagrange, o del valore medio, esprime in modo matematico questa semplice osservazione.

TEOREMA (di Lagrange): sia f una funzione continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a, b). Allora, esiste un punto c interno all'intervallo (a, b) in cui $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

OSSERVAZIONE: il teorema di Lagrange ha un'importante immagine geometrica. Consideriamo i due termini dell'uguaglianza $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Il primo, $f'(c)$ rappresenta la derivata della funzione f in un punto c interno all'intervallo, cioè la pendenza della retta tangente alla curva in quel punto. Il secondo la pendenza media della funzione nell'intervallo $[a, b]$, cioè la pendenza della corda che unisce gli estremi della funzione nell'intervallo considerato. Graficamente, quindi, il teorema del valore medio si può esprimere dicendo che esiste un punto interno all'intervallo $[a, b]$ in cui la tangente è parallela alla corda che unisce gli estremi in a e b.



Rapporti tra derivata prima e crescita della funzione

OSSERVAZIONE: la derivata prima di una funzione *f* rappresenta il limite del rapporto incrementale della funzione *f*, cioè il $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Se la funzione in un intorno del punto x_0 è crescente, $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$ se $h > 0$ e $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$ se $h < 0$ quindi in ogni caso il rapporto incrementale è positivo o nullo e, per il teorema della permanenza del segno, anche il suo limite, e cioè la derivata, deve essere positiva o nulla. Un discorso analogo vale per le funzioni decrescenti (la derivata è negativa o nulla). Vale quindi il seguente teorema:

TEOREMA: se *f* è derivabile in (a, b) e crescente allora per ogni x tale che $a < x < b$, $f'(x) \geq 0$. Se *f* è decrescente $f'(x) \leq 0$.

ATTENZIONE: il segno di uguaglianza non si può togliere. Non si può quindi dire "se la funzione è crescente allora la sua derivata è positiva". Infatti esistono funzioni crescenti in un intervallo che non hanno la derivata sempre positiva: la funzione $f(x)=x^3$ è crescente in un qualsiasi intervallo che contenga lo 0 ma in 0 ha derivata nulla.

Il teorema che inverte le conclusioni del teorema precedente è molto importante per le applicazioni e va sotto il nome di "test di monotonia".

TEOREMA (test di monotonia): se *f* è derivabile in (a, b) e per ogni x tale che $a < x < b$, $f'(x) \geq 0$. allora *f* è crescente nell'intervallo. Se in particolare $f'(x) > 0$ allora *f* è strettamente crescente.

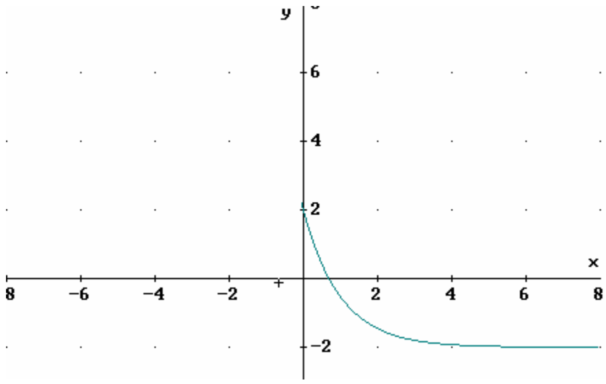
DIMOSTRAZIONE: supponiamo che $f'(x) \geq 0$ e siano x_1 e x_2 due punti appartenenti all'intervallo (a, b) con $x_1 < x_2$. Applichiamo il teorema del valore medio ai punti x_1 e x_2: esiste un punto c per cui $f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Ma c è nell'intervallo (a, b) e quindi $f'(c) \geq 0$; il rapporto incrementale nell'intervallo $[x_1, x_2]$ è quindi positivo o nullo e poiché il denominatore è positivo deve essere positivo o nullo anche il numeratore, cioè $f(x_2)-f(x_1)\geq 0$ o, in altre parole, $f(x_2)\geq f(x_1)$, cioè la funzione è crescente. L'altra affermazione è analoga con le disuguaglianze in senso forte.

Una diretta conseguenza di quest'ultimo teorema è il seguente

TEOREMA: se *f* è derivabile in (a, b) e tale che, $f'(x_0) = 0$. Allora, se $f'(x) \geq 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) \leq 0$ in un intorno destro di x_0, allora la funzione ha in x_0 un punto di massimo locale. Analogamente, se $f'(x) \leq 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) \geq 0$ in un intorno destro di x_0, allora la funzione ha in x_0 un punto di minimo locale.

ESEMPIO: sia data la funzione $f(x)=6x^2-x^3$. Determinare i suoi punti stazionari e la loro natura (gennaio 2001). I punti stazionari di *f* sono i punti per cui $f' = 0$. Poiché $f'(x)=12x-3x^2=3x(4-x)$ i punti che annullano la derivata sono i punti di ascissa 0 e 4. Il segno della derivata prima è negativo per $x < 0$ e per $x > 4$ e quindi la funzione è decrescente per $x < 0$, crescente se $0 < x < 4$ e decrescente per $x > 4$. Quindi per $x = 0$ la funzione ha un minimo (che vale 0) e per $x = 4$ la funzione ha un massimo (che vale 32).

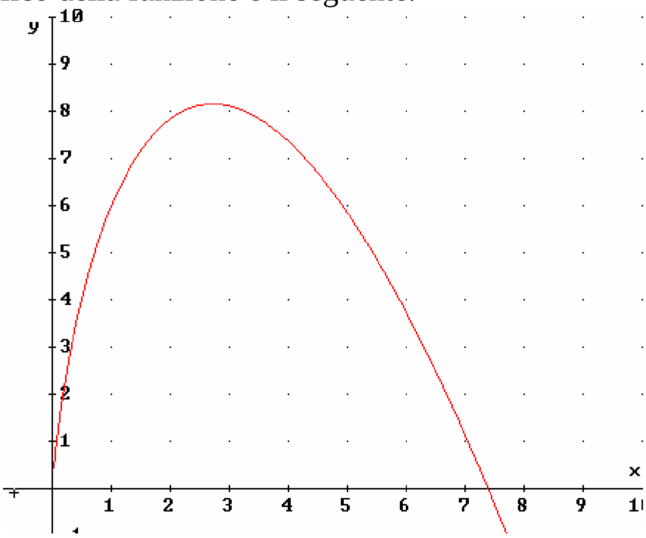
ESEMPIO: data la funzione $f(x) = 4e^{-x} - 2$ definita nell'intervallo [0, +∞) tracciare un grafico qualitativo di *f* e individuare i punti di massimo e minimo, specificando se si tratta di estremi globali o locali (luglio 2001). Il grafico della funzione è elementare:



e non presenta nessun punto stazionario. Il massimo globale è in $x = 0$. La derivata prima è $f'(x) = -4e^{-x}$ e infatti non si annulla mai, essendo sempre negativa. La funzione è quindi sempre decrescente.

ESEMPIO: trovare il massimo di $f(x) = x^2 e^{1-2x}$ nell'intervallo [0, +∞) (gennaio 1999, 271). Calcoliamo la derivata di *f*: $f'(x) = 2xe^{1-2x} + x^2(-2)e^{1-2x} = e^{1-2x}\left(2x - 2x^2\right)$. Il primo fattore è sempre positivo (un'esponenziale). L'altro è di secondo grado e si annulla per $x = 0$ e per $x = 1$. Poiché il segno di x^2 è negativo, la derivata prima è negativa per $x < 0$ e per $x > 1$ mentre è positiva per $0 < x < 1$. Quindi, nell'intervallo di definizione della funzione, il punto di massimo è quello con ascissa $x = 1$ e ordinata e^{-1}.

ESEMPIO: trovare minimo e massimo di $f(x) = 6x - 3x\ln x$ definita nell'intervallo $(0, e^2]$ (gennaio 1999, 271). Si ha: $f'(x) = 6 - 3\ln x - 3x\frac{1}{x} = 6 - 3\ln x - 3 = 3 - 3\ln x = 3(1 - \ln x)$ che si annulla per $x = e$, è positiva per $x < e$ e negativa per $x > e$. Quindi la funzione è crescente per $x < e$ e decrescente per $x > e$. Il valore massimo si ha quindi per $x = e$ (e vale $6e - 3e\ln e = 3e$). Poiché $\lim_{x \to 0^+} 6x - 3x\ln x = 0^+$ e $f(e^2) = 6e^2 - 3e^2 \ln e^2 = 6e^2 - 6e^2 = 0$ il valore minimo della funzione è 0 ottenuto per $x = e^2$. Il grafico della funzione è il seguente.



Esercizi

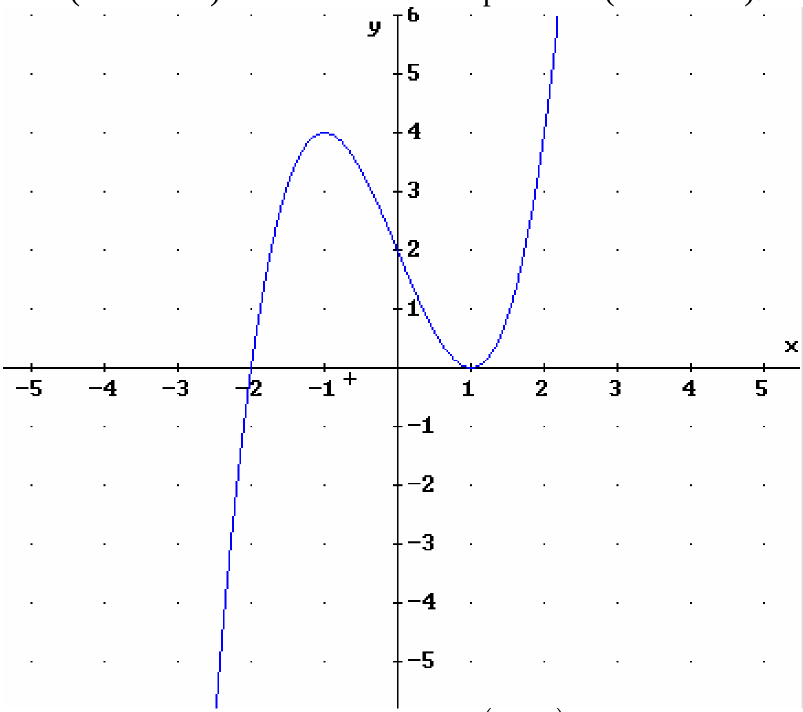
Trovare massimi e minimi delle seguenti funzioni negli intervalli indicati

1. $(x-1)^2(x+2)$ in tutto **R**
2. xe^{-x} in tutto **R**
3. La funzione $C(q)=\frac{q^2}{100}+\frac{q}{50}+400$ per $q > 0$ rappresenta il costo di produzione di una certa merce in funzione della quantità q. Scrivere l'espressione del costo medio $C_m(q)=\frac{C(q)}{q}$, calcolare il minimo e tracciare un grafico qualitativo del costo medio. Calcolare l'elasticità del costo e verificare che essa è uguale a 1 nel punto di minimo costo medio.

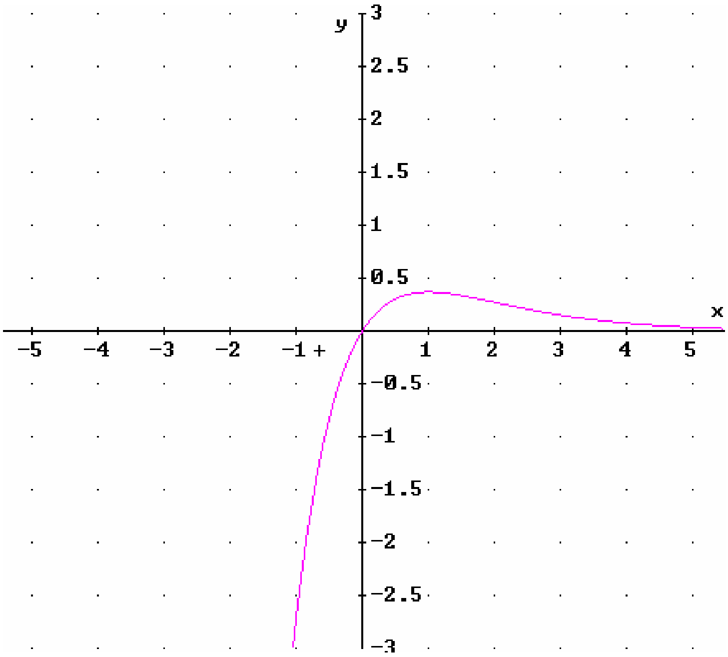
Soluzioni

Trovare massimi e minimi delle seguenti funzioni negli intervalli indicati

1. Si ha $f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2 = (x-1)(2x+4+x-1) = (x-1)(3x+3)$ e il segno della derivata prima è positivo per $x < -1$ e per $x > 1$. La funzione quindi ha un massimo locale per $x = -1$ (che vale 4) e un minimo locale per $x = 1$ (che vale 0).



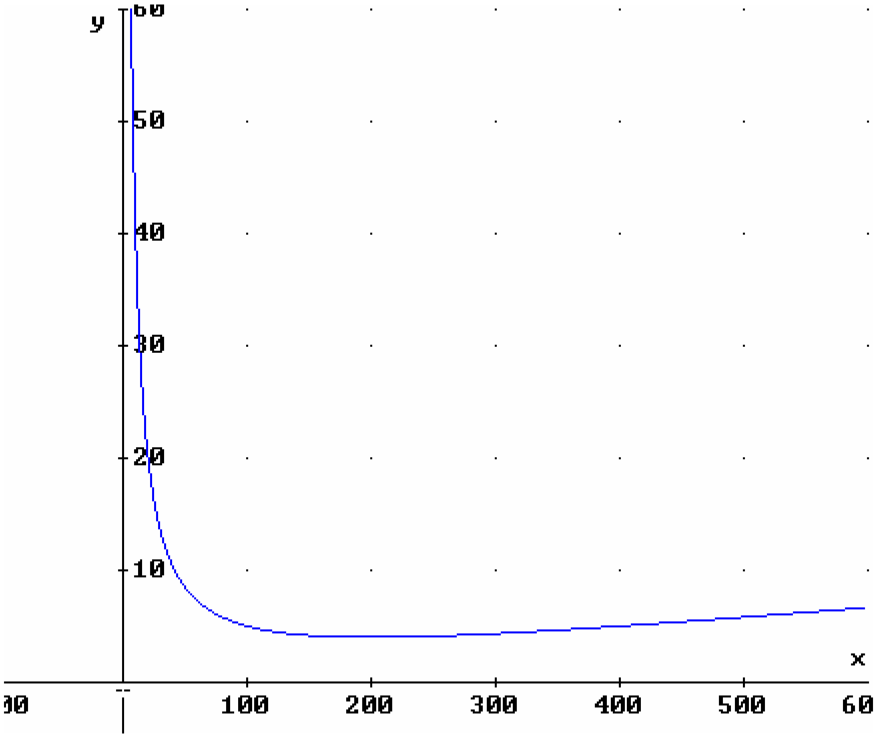
2. xe^{-x} in tutto **R**. Si ha $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$ che ha il segno di $1-x$ (l'esponenziale è sempre positivo). Quindi la funzione è crescente per $x < 1$ e decrescente per $x > 1$. In $x = 1$ c'è un massimo che vale e^{-1}.



3. La funzione $C(q)=\frac{q^2}{100}+\frac{q}{50}+400$ per $q > 0$ rappresenta il costo di produzione di una certa merce in funzione della quantità q. Scrivere l'espressione del costo medio $C_m(q)=\frac{C(q)}{q}$, calcolare il minimo e tracciare un grafico qualitativo del costo medio. Calcolare l'elasticità del costo e verificare che essa è uguale a 1 nel punto di minimo costo medio. Il costo medio è $C_m(q)=\frac{\frac{q^2}{100}+\frac{q}{50}+400}{q}=\frac{q}{100}+\frac{1}{50}+\frac{400}{q}$ definito solo per $q > 0$. Si ha $C'_m(q)=\frac{1}{100}-\frac{400}{q^2}$. Se poniamo $C'_m(q)>0$, cioè $\frac{1}{100}-\frac{400}{q^2}>0$ otteniamo $\frac{1}{100}>\frac{400}{q^2}$ cioè $\frac{q^2-40000}{100q^2}>0$. Il denominatore è sempre positivo; il numeratore è un fattore di secondo grado che si annulla per $q = 200$ e per $q = -200$, è positivo per $q > 200$ e per $q < -200$ e negativo altrimenti. Nell'intervallo di definizione della funzione, la derivata è positiva per $q > 200$ e negativa per $0 < q < 200$: quindi in $q = 200$ c'è un minimo che vale $C_m(200)=\frac{200}{100}+\frac{1}{50}+\frac{400}{200}=2+\frac{1}{50}+2=\frac{201}{50}$.

L'elasticità di C è $E_C(q)=q\frac{C'(q)}{C(q)}=q\frac{\frac{2q}{100}+\frac{1}{50}}{\frac{q^2}{100}+\frac{q}{50}+400}=q\frac{\frac{2q+2}{100}}{\frac{q^2+2q+40000}{100}}=q\frac{2q+2}{q^2+2q+40000}$

e nel punto $q = 200$ vale $E_C(200)=200\frac{402}{40000+400+40000}=\frac{200\cdot 402}{80400}=1$. Il grafico del costo medio è il seguente



Lezione 29-30

Derivate successive

Se una funzione f è differenziabile esiste la sua derivata prima f' che è anch'essa una funzione. La derivata della derivata prima si chiama *derivata seconda* di f e si indica con uno dei seguenti simboli $f'', \frac{d^2 f}{dx^2}, D^2 f$.

OSSERVAZIONE: La derivata seconda misura la velocità di variazione della derivata prima, cioè il tasso di variazione della pendenza di una curva.

OSSERVAZIONE: per quanto abbiamo scritto nella lezione precedente, se la derivata seconda è positiva allora la derivata prima è crescente e quindi la pendenza della curva aumenta. Viceversa, se la derivata seconda è negativa allora la derivata prima è decrescente e la pendenza della curva diminuisce.

ATTENZIONE: quando scriviamo "la pendenza della curva aumenta" intendiamo dire esattamente questo, cioè che il coefficiente angolare della retta tangente alla curva aumenta. Non c'è nessuna relazione con il *segno* della derivata prima. Una grandezza che passa da –5 a –3 aumenta anche se è di segno costantemente negativo.

Formula di Taylor

Abbiamo visto che data una funzione differenziabile f, un suo punto x_0 e un incremento h, il differenziale della funzione $hf'(x_0)$ rappresenta la parte principale dell'incremento della funzione. In simboli, $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)$ (il termine $o(h)$ è trascurabile rispetto ad h). Se ci limitiamo a considerare il differenziale, quindi, è come se in un intorno del punto x_0 trattassimo la funzione come una retta, la retta tangente $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Quali sono le parentele tra la funzione f e la retta tangente? Sono due:
1. la funzione e la retta passano per lo stesso punto $(x_0, f(x_0))$
2. la funzione e la retta hanno nel punto x_0 la stessa derivata prima $f'(x_0)$

Da un punto di vista grafico, il risultato è che la retta tangente approssima la funzione in vicinanza del punto x_0. Naturalmente questa approssimazione è la più semplice possibile, perché è fatta con una retta (la funzione più semplice che si possa usare). L'obiettivo di questa lezione è di provare ad approssimare la funzione con un polinomio di secondo grado, cioè con una parabola. L'approssimazione che otterremo in questo modo sarà sicuramente migliore (banalmente perché potremo usare una linea curva e non diritta come la retta).

Quali sono i requisiti che la parabola approssimante dovrà avere? Sicuramente quelli che sono già stati indicati per la retta tangente e quindi:
1. la funzione e la parabola passano per lo stesso punto $(x_0, f(x_0))$
2. la funzione e la parabola hanno nel punto x_0 la stessa derivata prima $f'(x_0)$

ma in aggiunta richiederemo che:
3. la funzione e la parabola abbiano la stessa derivata seconda

Per spiegare perché abbiamo aggiunto la terza richiesta, osserviamo che il fatto che una curva non sia lineare si traduce nel fatto che la sua derivata prima *non* sia costante (le uniche funzioni ad avere derivata costante sono le rette). Quindi, una volta che abbiamo garantito che la funzione e la parabola approssimante passano per lo stesso punto e hanno in quel punto la stessa pendenza, risulta naturale richiedere che le derivate prime, sempre in quel punto, cambino con la stessa velocità, cioè che le loro derivate (le derivate delle derivate prime, cioè le derivate seconde) siano uguali.

Impostiamo il tipo di parabola come la retta tangente $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ sommata ad un termine aggiuntivo di secondo grado $a(x-x_0)^2$. In altre parole, vogliamo determinare il termine *a* in modo tale che la funzione *f*(*x*) e la parabola $g(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+a(x-x_0)^2$ abbiano in comune, nel punto x_0:

1. il valore
2. la derivata prima
3. la derivata seconda

Costruiamo quindi la seguente tabella in cui i valori della colonna di *g* si calcolano osservando che $g'(x)=f'(x_0)+2a(x-x_0)$ e $g''(x)=2a$

	$f(x)$	$g(x)$
valore in x_0	$f(x_0)$	$f(x_0)$
derivata prima in x_0	$f'(x_0)$	$f'(x_0)$
derivata seconda in x_0	$f''(x_0)$	$2a$

Automaticamente le prime due condizioni sono soddisfatte. Per rendere vera anche la terza, basta scegliere $a=\frac{1}{2}f''(x_0)$. In tal caso, la funzione *g* diventa

$$g(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

che è la approssimazione cercata della funzione *f*.

DEFINIZIONE: data una funzione *f* differenziabile almeno due volte in un punto x_0, il polinomio $g(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$ si chiama polinomio di Taylor del secondo ordine della funzione *f* centrato nel punto x_0.

Il concetto si estende anche a polinomi di grado superiore.

DEFINIZIONE: data una funzione *f* differenziabile almeno *n* volte in un punto x_0, il polinomio $g(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ si chiama polinomio di Taylor di ordine *n* della funzione *f* centrato nel punto x_0.

ESEMPIO: sia $f(x) = \sqrt{x}$ e sia $x_0 = 4$. Per calcolare il polinomio di Taylor della funzione *f* nel punto x_0 scriviamo innanzi tutto le derivate prima e seconda della funzione *f*: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ e $f''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$. I valori di *f* e delle derivate prima e seconda nel punto $x_0 = 4$ sono rispettivamente 2, 1/4, –1/32. Allora il polinomio di Taylor di secondo grado della funzione *f* nel punto $x_0 = 4$ è

$$g(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{32}\right)(x-4)^2 = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2$$

OSSERVAZIONE: I polinomi di Taylor sono delle approssimazioni quindi sarebbe scorretto scrivere, per esempio, $\sqrt{x} = g(x)$. Noi sappiamo solo che in un intorno del punto $x_0 = 4$ le due funzioni sono "vicine", tanto più vicine quanto più x è vicino a 4. Potremo quindi scrivere $\sqrt{x} = g(x) + R(x)$ dove abbiamo indicato con $R(x)$ il resto, cioè la differenza tra la funzione e la sua approssimazione. Tuttavia, analogamente a quanto succede per il differenziale, il resto è un infinitesimo di ordine superiore all'ultimo termine del polinomio. Ad esempio, nel nostro caso potremo scrivere $\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + o\left[(x-4)^2\right]$.

DEFINIZIONE: si chiama formula di Taylor per la funzione *f* centrata nel punto x_0 con resto di Peano la relazione: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right)$

DEFINIZIONE: quando il punto x_0 è uguale a 0, il polinomio si chiama anche polinomio di McLaurin.

Alcuni polinomi di McLaurin

Elenchiamo ora i polinomi di McLaurin di alcune funzioni

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$
2. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots$
3. $(1+x)^a = 1 + ax + \dfrac{a(a-1)x^2}{2} + \ldots$

Secondo test di riconoscimento dei punti stazionari

La formula di Taylor permette di introdurre un altro metodo per stabilire la natura dei punti stazionari, quelli a tangente orizzontale (cioè con derivata uguale a 0).

TEOREMA: se
a) *f* è definita nell'intervallo (a, b)
b) *f* è derivabile due volte in x_0
c) $f'(x_0) = 0$

allora
se $f''(x_0) > 0$, x_0 è un punto di minimo locale

se $f''(x_0) < 0$, x_0 è un punto di massimo locale

DIMOSTRAZIONE: basta scrivere il polinomio di Taylor della funzione *f* nel punto x_0:
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right)$ e osservare che per la condizione c) il secondo addendo è uguale a 0. La formula si riduce quindi a
$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right)$. Osserviamo ora che per *x* molto vicino a x_0, il valore di $f(x)$ è uguale al valore di $f(x_0)$ più la quantità $\frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$ che ha il segno di $f''(x_0)$ perché gli altri fattori sono positivi e il termine o-piccolo è trascurabile. Quindi, se $f''(x_0) > 0$ il valore di $f(x)$ è maggiore del valore di $f(x_0)$ e quindi x_0 è un punto di minimo. Se viceversa $f''(x_0) < 0$ il valore di $f(x)$ è minore del valore di $f(x_0)$ e quindi x_0 è un punto di massimo.

OSSERVAZIONE: questo criterio è preferibile al primo perché richiede solo di calcolare gli zeri della derivata prima e di valutare in essi la derivata seconda. Non è necessario quindi discutere il segno della derivata prima ma basta risolvere l'equazione $f'(x_0) = 0$.

OSSERVAZIONE: se $f''(x_0) = 0$ il test è inutilizzabile perché in questo caso il punto può essere un estremo ma può anche non esserlo. Ad esempio, per la funzione $y = x^3$ l'origine è un punto in cui derivata prima e seconda sono uguali a 0 e il punto non è di minimo né di massimo. Per la funzione $y = x^4$, invece, l'origine è un punto di minimo (la funzione è sempre positiva e quindi ha un minimo quando vale 0). Eppure, la derivata prima e la seconda valgono 0 nell'origine.

ESEMPIO: si consideri la funzione $y = (x-1)^2(x-2)$, la cui derivata prima è $y' = 3(x-1)(x+1)$ che si annulla in $x = 1$ e in $x = -1$ che sono gli unici punti stazionari. La derivata seconda è $y'' = 6x$. Poiché $y''(-1) = -6 < 0$ $x = -1$ è un punto di massimo; poiché $y''(1) = 6 > 0$ il punto $x = 1$ è di minimo.

Lezione 31-32

Test di convessità

La derivata seconda di *f* dà delle importanti indicazioni sul grafico di *f*. In particolare, essendo la derivata della derivata prima, ci dice se la pendenza della curva aumenta o diminuisce. Le conclusioni si possono riassumere in questo teorema.

TEOREMA: se *f* è una funzione differenziabile due volte in un intervallo (*a*, *b*) allora le seguenti 3 condizioni sono equivalenti:

a) *f* convessa (in altre parole concava verso l'alto)
b) f' crescente
c) $f'' \geq 0$

OSSERVAZIONE: La condizione b) e c) sono equivalenti per il test di monotonia. Esse sono equivalenti alla a) per una semplice osservazione di tipo geometrico. Se la funzione è convessa in un intervallo la sua pendenza cresce (o almeno rimane costante): quindi la *f'* è crescente. La curva si mantiene *sempre* al di sopra della tangente. Viceversa, se la funzione è concava la pendenza diminuisce e quindi *f'* è decrescente. In questo caso, la curva si mantiene *sotto* la tangente

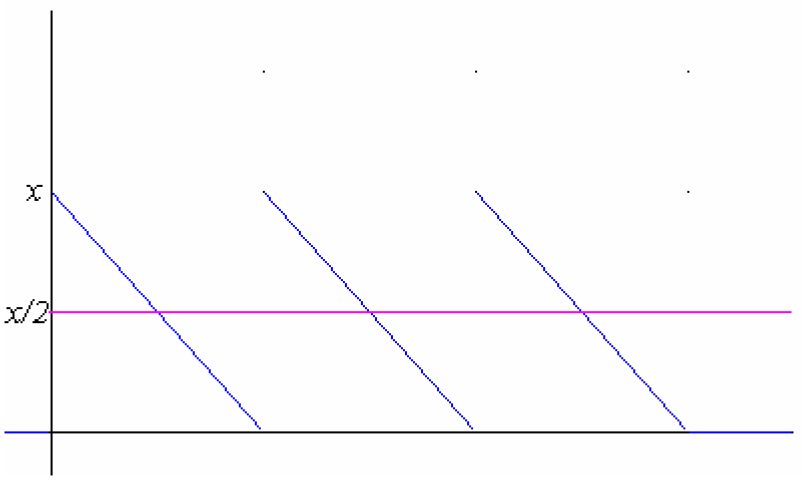
Quando la funzione non è differenziabile due volte il teorema precedente non si può applicare, Tuttavia, la considerazione che lega la convessità alla posizione reciproca di curva e tangente si mantiene. Vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA: se *f* è differenziabile in (*a*, *b*) allora *f* è convessa se e solo se $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ per ogni *x* e x_0 interni all'intervallo (*a*, *b*).

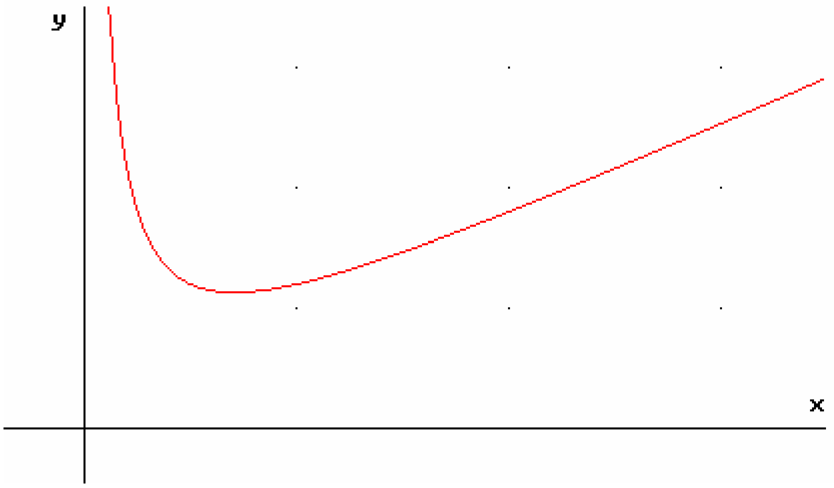
OSSERVAZIONE: la condizione $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ si può leggere così: "la funzione sta sopra la tangente".

Il problema delle scorte

Come applicazione di quanto scritto, analizziamo da un punto di vista semplificato il problema dell'approvvigionamento di un bene da parte di un'azienda. Se un'azienda ha bisogno di una certa merce deve ordinarla periodicamente e quando la ordinata deve sostenere dei costi di magazzino. Entrambe le attività rappresentano un costo: se si ordina troppo spesso, inevitabilmente si ordina poco e i costi di magazzino sono bassi (perché poca è la merce da conservare) ma aumentano i costi di trasporto. Viceversa, se si ordina troppo raramente, i costi di trasporto sono bassi, ma si deve sostenere un alto costo di magazzino.
Diamo ora una forma quantitativa al problema.
Supponiamo che il fabbisogno della merce in un certo periodo, diciamo un anno, sia *S*. La merce viene ordinata ad intervalli di tempo regolari in quantità costante che chiameremo *x*. In un anno, quindi, ci saranno *S*/*x* ordinazioni. Ogni ordinazione ha un costo di trasporto che supponiamo costante e pari a *g*. Il costo di trasporto complessivo per le ordinazioni è quindi *gS*/*x*.
La merce viene conservata in un magazzino il cui costo, per unità di merce è pari a *m*. In magazzino, tuttavia, la merce non è costante: subito dopo l'ordinazione la merce è *x* e poco prima dell'ordinazione seguente è quasi zero (nell'ipotesi che non venga fatto alcun accantonamento). Noi supporremo che la merce venga utilizzata in modo uniforme, in modo che la giacenza in magazzino in funzione del tempo sia rappresentata dal grafico seguente (linea blu):



Si tratta di una funzione discontinua perché nel momento del rifornimento la quantità giacente in magazzino passa "istantaneamente" da 0 a *x*. Poiché il costo di magazzinaggio è proporzionale alla quantità di merce bisogna valutare la quantità che mediamente è giacente in magazzino e, nell'ipotesi di consumo uniforme, questa media è *x*/2. Il costo di magazzinaggio è quindi *mx*/2. La funzione costo totale è quindi $C(x) = \frac{Sg}{x} + \frac{m}{2}x$ (definita per $x > 0$) e ci interessa trovare il valore di *x* che minimizza il costo. La derivata di *C*(*x*) è $C'(x) = -\frac{Sg}{x^2} + \frac{m}{2}$ e si annulla per $x = \sqrt{\frac{2Sg}{m}}$ (il valore col segno negativo è fuori dal dominio). La derivata seconda è $C''(x) = \frac{2Sg}{x^3}$ ed è sempre positiva, quindi la funzione è sempre convessa (cioè concava verso l'alto). Il punto di ascissa $x = \sqrt{\frac{2Sg}{m}}$ non può che essere un minimo. Il grafico della funzione è il seguente:



Punti di flesso

Per i punti di flesso di una funzione vale il seguente teorema.

TEOREMA: se x_0 è un punto di flesso di una funzione ed esiste $f''(x_0)$ allora deve necessariamente essere $f''(x_0)=0$.

OSSERVAZIONE: è importante notare che la condizione è solo necessaria e non sufficiente, cioè non è detto che in un punto in cui si annulla la derivata seconda si abbia sempre un punto di flesso. Il controesempio è fornito dalla funzione $f(x)=x^4$ che nell'origine ha derivata seconda uguale a zero ma che non ha nello stesso punto un flesso (anzi, è convessa ed ha un minimo).

Schema per lo studio di una funzione

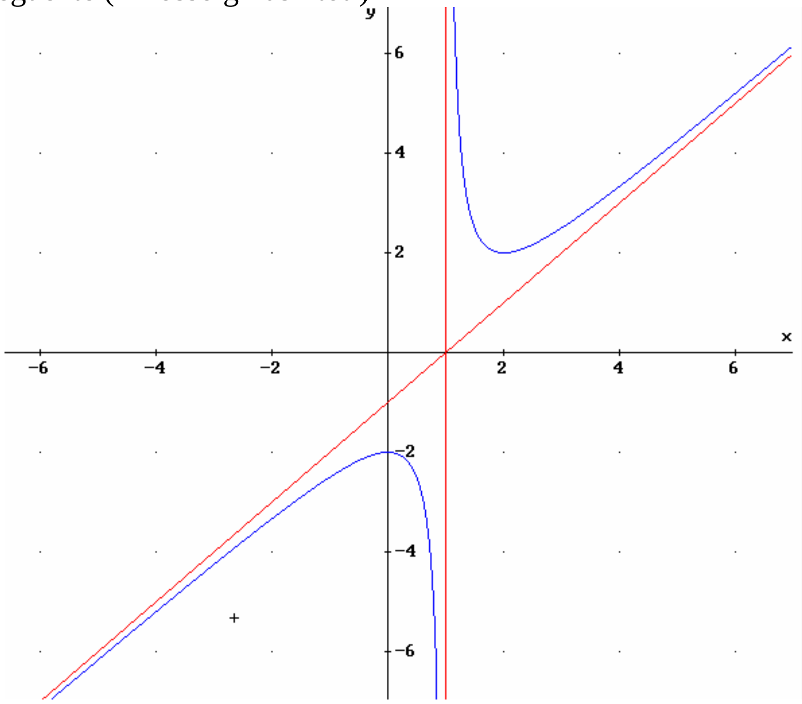
Nello svolgimento di alcuni esercizi è richiesto il tracciamento del grafico di una funzione, la determinazione dei punti salienti del grafico stesso (massimi, minimi, punti di flesso, punti di discontinuità, punti a tangente verticale, ecc.) e i comportamenti asintotici della funzione (limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti orizzontali, verticali o obliqui). Suggeriamo ora uno schema da seguire per lo svolgimento di tali esercizi. Tale schema non è in alcun modo prescrittivo: ai risultati si può giungere in molti modi equivalenti. Per chi non avesse mai incontrato questo tipo di esercizio, tuttavia, lo schema potrebbe rivelarsi utile.

1. determinazione del dominio della funzione se questo non è già stato specificato nella definizione della funzione stessa
2. calcolo dei limiti agli estremi del dominio; determinazione degli asintoti verticali, orizzontali e obliqui
3. calcolo della derivata prima e della derivata seconda e dei loro campi di esistenza
4. determinazione dei punti di massimo, minimo e di flesso
5. tracciamento del grafico

Seguiamo questo schema per studiare la funzione $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

1. Il dominio della funzione è l'insieme $D=\{x\in R, x\neq 1\}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, perché il numeratore ha grado superiore al denominatore; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$, quindi la retta $x=1$ è un asintoto verticale. Per vedere se esistono asintoti obliqui, calcoliamo $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ e, successivamente, $q=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-mx=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}-x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+2-x^2+x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x+2}{x-1}=-1$ e quindi la funzione ha come asintoto obliquo la retta $y=x-1$
3. $f'(x)=\dfrac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ e $f''(x)=\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{2}{(x-1)^3}$. Entrambe le derivate sono definite per tutti i valori del dominio D

4. La derivata prima si annulla per $x = 0$ e per $x = 2$. In questi punti la derivata seconda è rispettivamente negativa (uguale a –2) e positiva (uguale a 2) e quindi il punto (0, –2) è un punto di massimo mentre il punto (2, 2) è un punto di minimo. Il segno della derivata prima è determinato dal numeratore $x^2 - 2x$ che è positivo per $x < 0$ e per $x > 2$, intervalli in cui la funzione è crescente. Non esistono punti di flesso (la derivata seconda non si annulla mai).
5. Il grafico è il seguente (in rosso gli asintoti)

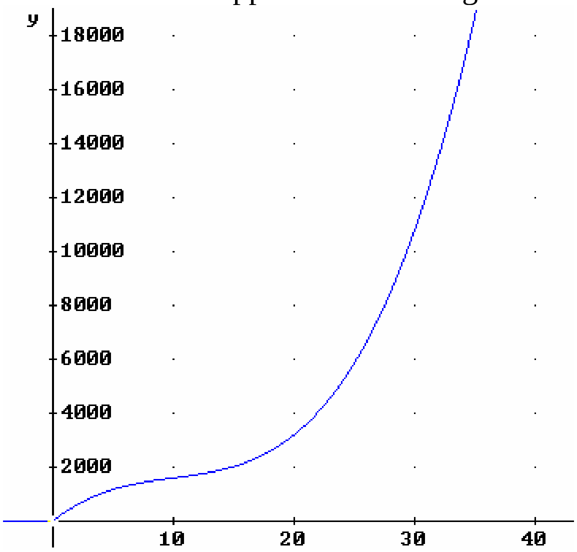


Esercizi

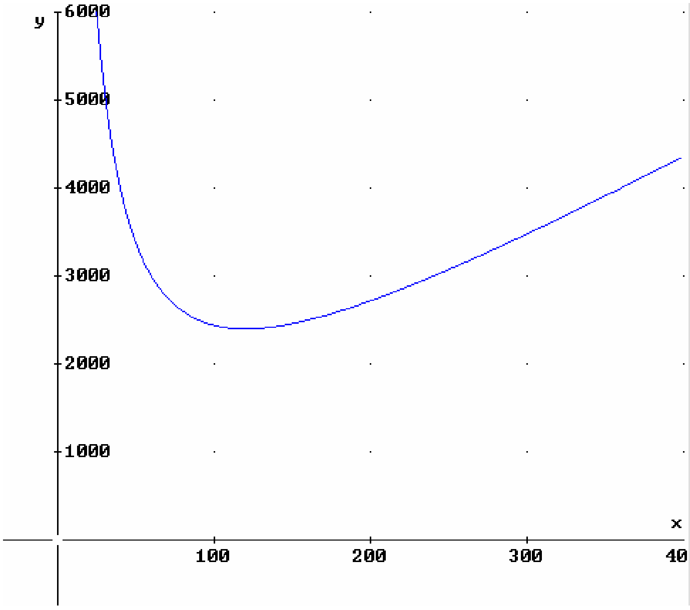
1. Studiare le funzioni $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$, $f(x) = xe^{-x}$
2. Un'impresa sostiene per la produzione
   a) un costo fisso settimanale di 1200 euro
   b) una spesa per materie prime e lavorazione di 5 euro per kg prodotto.
   La capacità massima produttiva è di 300 kg alla settimana. Determinare il costo totale il costo marginale e il costo unitario. Trovare la quantità per cui il costo unitario è minimo.
3. Un'impresa sostiene un costo totale $C(x) = x^3 - 30x^2 + 360x$, dove x è la quantità prodotta. Il prezzo di vendita è costante e uguale a 492 euro. Rappresentare graficamente il costo totale, determinare il costo marginale e il costo medio e trovare per quale valore il costo medio è minimo. Determinare per quale valore l'utile è massimo. Ripetere i calcoli con un prezzo di 303 euro.
4. Un pastificio industriale consuma 240q di farina al mese. Ogni ordinazione comporta la spesa fissa di 50 euro e le spese di magazzinaggio ammontano a 20 euro al quintale all'anno. La merce è depositata in un magazzino che ha la capacità di 150 q. Determinare la quantità che conviene ordinare ogni volta per rendere minima la spesa complessiva, il numero di ordinazioni e la loro periodicità. Se la capacità del magazzino fosse di 90q si modificherebbe la scelta?

Soluzioni

1. Studiare le funzioni $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$, $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$, $f(x)=xe^{-x}$
2. Il costo totale è $C(x)=1200+5x$ con $0\le x\le 300$. Il costo marginale è 5 (costante). Il costo unitario è dato da $C_m(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{1200}{x}+5$ con $0<x\le 300$. Esso è minimo per x = 300 (la funzione costo medio è sempre decrescente perché la sua derivata è $C_m'(x)=-\frac{1200}{x^2}$.
3. Il costo totale è rappresentato dal seguente tratto di cubica



Il costo medio è $C_m(x)=x^2-30x+360$ e il costo marginale è $C'(x)=3x^2-60x+360$. La derivata del costo medio è $2x-30$ e si annulla per x = 15 che è il valore per cui si ha costo minimo. Osserviamo che per questo valore costo medio e costo marginale coincidono. Il costo è 135.
L'utile è dato da $492x-\left(x^3-30x^2+360x\right)=-x^3+30x^2+132x$ e la sua derivata è $-3x^2+60x+132$ che si annulla per x = 22 e per x = –2 (quest'ultima soluzione non ha significato). La derivata seconda dell'utile è $-6x+60$ e per x = 22 vale –72. Quindi (22, 6776) è un punto di massimo.
Con un prezzo di 303 euro si hanno due zeri per la derivata prima, x = 1 e x = 19. Al primo corrisponde un utile minimo, al secondo un utile massimo di 2888.
4. Sia x la quantità ordinata ogni volta. Poiché la capacità del magazzino è di 150q deve essere $0\le x\le 150$. Il costo di magazzinaggio è uguale a $20\frac{x}{2}=10x$. Poiché il fabbisogno mensile è di 240q quello annuale sarà di 2880 e quindi se ogni volta si ordina x, il numero delle ordinazioni sarà 2880/x. Il costo totale sarà quindi $C(x)=50\frac{2880}{x}+10x$ la cui derivata è $C'(x)=-\frac{144000}{x^2}+10$ che si annulla per x = 120 dove ha un minimo. Il numero di ordinazioni in un anno è 2880/120 = 24 e quindi una ogni 15 giorni. Se la capacità del magazzino fosse 90q allora la x dovrebbe essere inferiore a 90 e il valore minimo si dovrebbe trovare in base a considerazioni grafiche. Poiché il grafico della funzione $C(x)=50\frac{2880}{x}+10x$ è il seguente



il minimo della funzione se $0 \le x \le 90$ si trova in $x = 90$ e le ordinazioni sono 2880/90 = 32 all'anno.