Prof. Fabrizio Iozzi – email: fabrizio.iozzi@uni-bocconi.it

Lezione 33-34

In alcune applicazioni, le variabili che si vogliono rappresentare attraverso un modello matematico sono in qualche modo collegate tra loro. Per esempio, si pensi ad un investimento finanziario che consista di un certo numero di titoli azionari. Col passare del tempo, ad ogni azione corrisponde un certo andamento (aumento, diminuzione del valore). La descrizione complessiva del portafoglio dei titoli può essere descritta in modo conveniente se si rappresentano contemporaneamente tutte le azioni che compongono il portafoglio.
Situazioni di questo genere sono descritte matematicamente dai *vettori*, oggetti matematici costituiti da numeri ma diversi da numeri. Le prossime lezioni saranno dedicate allo studio di questi oggetti.

Vettori in R^n

DEFINIZIONE: si chiama *vettore* di R^n una n-upla (ordinata) di numeri reali (detti *componenti* del vettore). Un vettore si indica di norma con una lettera minuscola in grassetto e le sue componenti con la lettera che indica il vettore con un indice corrispondente alla posizione del vettore. R^n è detto "spazio vettoriale". *n* si dice dimensione dello spazio vettoriale.

ESEMPIO: $\mathbf{a} = (1, 2, 4)$ è un vettore di R^3 le cui componenti sono $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_3 = 4$.

DEFINIZIONE: se le componenti di un vettore sono allineate orizzontalmente, il vettore si dice *vettore riga*; se sono allineate verticalmente si dice *vettore colonna*.

ESEMPIO: il vettore $\mathbf{a} = (1, 2, 4)$ è un vettore riga di R^3. Il vettore $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ è un vettore colonna di R^4.

OSSERVAZIONE: i vettori di R sono semplicemente i numeri reali. I vettori di R^2 sono le coppie di numeri reali. I vettori di R^2 si possono mettere in corrispondenza ai punti del piano. Per esempio, il vettore $\mathbf{a} = (2, 3)$ corrisponde al punto di coordinate (2, 3).
Per lo stesso motivo, i vettori sono in analogia anche ai vettori di cui si parla nei corsi di fisica. In questo caso, il vettore è una freccia che ha l'origine nel punto (0,0) e termina nel punto (2,3)

Nel seguito considereremo solo vettori colonna, anche quando saranno scritti come vettori riga.

Somma di vettori e moltiplicazione per uno scalare

Tra vettori di uno stesso spazio vettoriale si può definire in modo abbastanza intuitivo un'operazione di somma algebrica *per componenti* e, di conseguenza, quella di moltiplicazione per un numero.

DEFINIZIONE: la somma di due vettori **a** e **b** è il vettore c le cui componenti sono la somma ordinata delle componenti dei vettori **a** e **b**. In simboli $c = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$. In modo analogo si definisce la differenza di due vettori.

DEFINIZIONE: il prodotto di un vettore a per un numero k è un vettore d le cui componenti sono le componenti del vettore **a** moltiplicate per k. In simboli $d = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$.

OSSERVAZIONE: si noti che la seconda operazione, per quanto naturale, moltiplica tra loro due oggetti diversi, un numero (k) e un vettore (**a**).

PROPRIETÀ:
- la somma di vettori gode delle proprietà associativa e commutativa;
- esiste l'elemento neutro che è il vettore nullo, indicato con il simbolo **0**, il vettore di R^n che ha tutte le componenti uguali a 0: **0** = (0, 0, …, 0);
- per ogni vettore **a** esiste l'opposto: – a, che è il vettore le cui componenti sono l'opposto delle componenti del vettore **a;**

OSSERVAZIONE: la somma tra vettori così definita corrisponde alla usuale somma di vettori introdotta nei corsi di fisica spiegata dalla "regola del parallelogramma".

OSSERVAZIONE: rispetto a queste due operazioni, somma e moltiplicazione per uno scalare, l'insieme dei vettori risulta "chiuso", nel senso che il risultato di una qualsiasi operazione è comunque un elemento dell'insieme dei vettori di R^n. Per questa particolare proprietà, l'insieme dei vettori di R^n con queste operazioni viene chiamato "spazio vettoriale".

Nel seguito ometteremo, ove non necessario, la specificazione che i vettori di cui si parla sono vettori di R^n.

Combinazione lineare di vettori

DEFINIZIONE: dati k vettori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_k$ e k numeri $c_1, c_2, \dots, c_k$, si dice *combinazione lineare dei vettori **x** con coefficienti c*, il vettore $\mathbf{a} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n$.

ESEMPIO: dati i vettori $x_1 = (1, -1, 2)$, $x_2 = (2, 0, 1)$ e $x_3 = (-1, -2, 1)$ e i coefficienti 2, 1, 3, la combinazione lineare dei vettori x con i coefficienti assegnati è:

$$2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-8\\8\end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE: nello spazio R^n si considerino gli *n* vettori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ le cui componenti sono $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, …, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$. Le componenti dei vettori **e** sono tutte nulle ad eccezione dell'n–esima. Gli *n* vettori **e** si dicono vettori fondamentali dello spazio R^n.
Nell'analogia con il piano cartesiano, i vettori fondamentali corrispondono ai punti (1,0) e (0,1).
Nell'analogia fisica, i vettori fondamentali sono diretti come gli assi coordinati.

OSSERVAZIONE: ogni vettore di R^n è combinazione lineare dei vettori fondamentali con coefficienti le proprie componenti. Ad esempio, il vettore (3,4) è combinazione lineare dei vettori (1,0) e (0,1) con coefficienti rispettivamente 3 e 4. Infatti, $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

DEFINIZIONE: una combinazione lineare di vettori si dice *convessa* se i coefficienti c hanno somma uguale a 1.

Simbolo di sommatoria

NOTAZIONE: la combinazione lineare di vettori si indica, qualche volta, con il simbolo di sommatoria $\sum$ (lettera greca sigma maiuscola). La notazione corretta è $\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{x}_i$ che si legge "somma per i che va da 1 a n di c con i x con i". Si tratta di una scrittura sintetica per indicare una somma estesa a più indici. In basso è scritto chi è l'indice e da dove parte, in alto dove arriva (implicitamente, il passo è uguale a 1) e a destra si scrive che cosa va sommato.

Quindi, $\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{x}_i = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k$

Ecco altri esempi:

- $\sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5=15$
- $\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1+4+9+16=30$
- $\sum_{s=1}^{6} \frac{1}{s} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{147}{60}$
- $\sum_{i=1}^{5} p_i = p_1+p_2+p_3+p_4+p_5$

La lettera che denota l'indice della sommatoria non è essenziale. Importano, invece, i valori di inizio e di fine. La scrittura di una somma con il simbolo di sommatoria non è unica. Per esempio, $\sum_{i=0}^{3}(i+1)=1+2+3+4$ e $\sum_{i=1}^{4} i = 1+2+3+4$ hanno lo stesso significato (cambiano i valori dell'indice e cambia anche la quantità sommata, ma il valore è lo stesso).

Per le sommatorie valgono le proprietà delle somme e in particolare quella "di raccoglimento". Se abbiamo una somma $ab+ac$ possiamo scriverla come $a(b+c)$. Analogamente si può semplificare la somma $\sum_{i=1}^{n} ac_i = a\sum_{i=1}^{n} c_i$ (in altre parole, le quantità costanti rispetto all'indice si possono "portare fuori" dal segno di sommatoria).

Sottospazi vettoriali

DEFINIZIONE: un insieme di vettori chiuso rispetto alle operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare si chiama *sottospazio vettoriale*.

DEFINIZIONE: dati k vettori $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, … $\mathbf{x}_k$ e k numeri c_1, c_2, …, c_k, l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori **x** con coefficienti c, è un sottospazio detto "sottospazio generato dai vettori". I k vettori $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, … $\mathbf{x}_k$ si chiamano generatori del sottospazio.

OSSERVAZIONE: l'analogia geometrica può aiutare a chiarire il concetto di spazio e sottospazio. Si consideri il piano e un vettore diverso da **0**, per esempio il vettore (2,3). Le combinazioni lineari del solo vettore (2,3) non sono altro che i suoi multipli, quindi tutti i vettori che sono diretti come (2,3). In termini geometrici, si tratta dei punti della retta che passa per l'origine e per il punto (2,3). Questi punti formano un sottospazio di R^2.

DEFINIZIONE: se un insieme di vettori genera tutto lo spazio in cui sono definiti i vettori si parla di un sistema di generatori dello spazio.

Esercizi svolti

- calcolare la somma dei vettori $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

  Sono tre vettori di R^3. Basta fare la somma per componenti: $\begin{pmatrix}4\\-1\\5\end{pmatrix}$

- considerando i vettori dell'esercizio precedente, calcolare la loro combinazione lineare di coefficienti 2, –1 e 3.

  Basta svolgere il calcolo $2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\3\\-1\end{pmatrix}$

- Dire se il vettore $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ è combinazione lineare dei vettori $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

  Per stabilire se l'affermazione è vera, ci dobbiamo domandare se esistono due numeri, c_1 e c_2, tali che $c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Il vettore sulla sinistra è uguale a $\begin{pmatrix}c_1\\2c_1+c_2\end{pmatrix}$ e quindi la domanda del problema è equivalente alla domanda: esiste una coppia di numeri c_1 e c_2 tali che $c_1 = 2$ e $2c_1 + c_2 = 3$? Si tratta di un sistema di due equazioni nelle due incognite c_1 e c_2. La soluzione esiste ed è $c_1 = 2$ e $c_2 = -1$. Quindi la risposta alla domanda del problema è affermativa.

- Dire se il vettore $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ è combinazione lineare dei vettori $\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

  Si tratta di un problema analogo al precedente, ma in tre dimensioni. Dobbiamo cercare due numeri, c_1 e c_2, tali che $c_1\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Ragionando analogamente a quanto fatto precedentemente si arriva al sistema $\begin{cases}2c_1=1\\3c_1+c_2=2\\2c_2=3\end{cases}$ che non ha soluzione perché la prima equazione dà $c_1 = 1/2$, la terza dà $c_2 = 3/2$ e sostituendo questi valori nella seconda equazione si ha $3/2+3/2 = 2$ che è falsa. La risposta al problema è quindi negativa.

Esercizi

1. Dati i vettori $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, esprimere il vettore $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\mathbf{x}^1$ e $\mathbf{x}^2$. (settembre 2001)
2. Dire se il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ può essere scritto come combinazione lineare dei vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. I due vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono un sistema di generatori per R^3?

Soluzioni

1. Dati i vettori $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, esprimere il vettore $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\mathbf{x}^1$ e $\mathbf{x}^2$. Si tratta di risolvere il sistema $c_1\mathbf{x}^1 + c_2\mathbf{x}^2 = \mathbf{b}$, cioè $\begin{cases} 3c_1 - 5c_2 = -11 \\ -5c_1 + 3c_2 = -3 \end{cases}$, la cui soluzione si ricava, per esempio, determinando c_1 dalla prima equazione: $c_1 = \frac{5c_2 - 11}{3}$ e sostituendo nella seconda: $-5\frac{5c_2 - 11}{3} + 3c_2 = -3$, da cui $-25c_2 + 55 + 9c_2 = -9$ cioè $-16c_2 = -64$. Quindi $c_2 = 4$ e $c_1 = 3$. Infatti, $3\mathbf{x}^1 + 4\mathbf{x}^2 = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. Dire se il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ può essere scritto come combinazione lineare dei vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si tratta di risolvere il sistema $c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, cioè $\begin{cases} 2c_1 - 2c_2 = 3 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \\ c_1 = 1 \end{cases}$. La terza equazione è già risolta e sostituendo nella prima e nella seconda si ottiene $c_2 = -1/2$. La risposta è affermativa e i coefficienti della combinazione lineare sono 1 e $-1/2$.

   Se i due vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ fossero un sistema di generatori per R^3 vorrebbe dire che qualunque vettore di R^3 può essere scritto come combinazione lineare di questi vettori.

   Proviamo a vedere: sia $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vettore di R^3. Se esso può essere espresso come combinazione lineare dei due vettori dati, allora vuol dire che il sistema $c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ deve avere sempre soluzioni. Il sistema è $\begin{cases} 2c_1 - 2c_2 = a \\ c_1 + 2c_2 = b \\ c_1 = c \end{cases}$ e dà immediatamente la soluzione $c_1 = c$. Dalle altre due equazioni si ricava $c_2 = \frac{2c - a}{2}$ e $c_2 = \frac{b - c}{2}$; queste uguaglianze dovrebbero essere entrambe vere, cioè $2c - a = b - c$, $3c = a + b$. Se questa uguaglianza è verificata (come è nel caso dell'esercizio appena risolto) allora si può risolvere il sistema ma non sempre è così: per esempio, il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ non verifica questa uguaglianza e quindi non può essere espresso come combinazione lineare dei due vettori dati. Il sistema dei due vettori, quindi, non è un sistema di generatori.

Lezioni 35-36

Dipendenza lineare

DEFINIZIONE: un insieme di k vettori si dice *linearmente dipendente* se uno almeno dei k vettori può essere espresso come combinazione lineare degli altri.

ESEMPIO: i vettori $\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti. Infatti,
$\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

OSSERVAZIONE: la definizione non dice "quale" dei vettori deve essere scritto come combinazione lineare degli altri. In generale, questo non si può specificare e tutti o solo alcuni dei vettori potrebbero essere scritti come combinazione lineare degli altri. In sintesi, quindi, il concetto di dipendenza lineare si deve applicare ad un *insieme* di vettori.

ESEMPIO: con riferimento all'esempio precedente, nell'insieme di vettori linearmente dipendenti, anche il vettore $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ si può scrivere come combinazione lineare degli altri due. Infatti

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{7}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Un calcolo analogo si sarebbe potuto svolgere per il terzo vettore.

DEFINIZIONE: se in un insieme di k vettori nessuno può essere espresso come combinazione lineare degli altri, l'insieme si dice *linearmente indipendente*.

OSSERVAZIONE: in un insieme linearmente dipendente, uno dei vettori può essere scritto come combinazione lineare degli altri. Allora esiste una combinazione lineare (con i coefficienti non tutti nulli) di *tutti* i k vettori che dà come risultato il vettore nullo Nell'esempio precedente, poiché $\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ allora la combinazione lineare dei vettori $\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ con coefficienti 1, –2 e –3 dà il vettore **0**. Questa osservazione è molto importante e dà luogo ad un'altra definizione di dipendenza lineare.

DEFINIZIONE: un insieme di vettori è linearmente dipendente se esiste una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli che dà il vettore nullo.

OSSERVAZIONE: se esiste una tale combinazione, allora ne esistono infinite. Infatti, moltiplicando tutta la relazione per un qualsiasi numero si ottengono altri valori per cui la relazione è comunque verificata. Ad esempio, moltiplicando la relazione dell'esempio precedente per 3 si ottengono per i coefficienti i valori 3, –6 e –9. La combinazione lineare dei vettori con questi coefficienti dà comunque il vettore nullo.

OSSERVAZIONI

- la condizione " a coefficienti non tutti nulli" è necessaria: una combinazione che avesse tutti i coefficienti uguali a zero darebbe banalmente il vettore nullo.
- se i vettori sono solo due, il concetto di dipendenza lineare si semplifica notevolmente: in tal caso infatti, la definizione dice che uno è combinazione lineare dell'altro, cioè è un suo multiplo. Quindi: due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se uno è multiplo dell'altro.
- se un insieme è linearmente dipendente, aggiungendo vettori l'insieme rimane tale.
- i vettori fondamentali di uno spazio R^n sono indipendenti. Infatti una loro combinazione lineare non nulla non può dare il vettore nullo (perché le componenti su cui agiscono i coefficienti sono diverse).

Applicazione: un semplice mercato finanziario

Supponiamo che in un mercato finanziario siano dati tre titoli a, b e c con scadenza due anni.
Per tutti i titoli si paga una certa somma adesso (il costo della sottoscrizione) per avere diritto a riscuotere in tempi futuri determinate somme di denaro. Le caratteristiche dei 3 titoli sono riassunte dai seguenti 3 vettori $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -100 \\ 110 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 121 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -100 \\ 10 \\ 110 \end{pmatrix}$ che vanno interpretate come segue.

Il primo titolo richiede un investimento di 100 € e dà diritto alla riscossione di 110 € tra un anno e basta. Il secondo, a fronte dello stesso investimento, permette la riscossione di 121 € tra due anni (e nulla allo scadere dell'anno intermedio). Il terzo, sempre a fronte di un investimento di 100 € offre la riscossione di 10 € tra un anno e di 110 € tra due anni.
Apparentemente i tre investimenti non hanno nessuna parentela e un potenziale investitore non saprebbe come scegliere tra le diverse opportunità.
I tre vettori **a**, **b** e **c** sono dipendenti. Infatti, se impostiamo il sistema $c_1a + c_2b + c_3c = 0$ otteniamo
$\begin{cases} -100c_1 - 100c_2 - 100c_3 = 0 \\ 110c_1 + 10c_3 = 0 \\ 121c_2 + 110c_3 = 0 \end{cases}$, che riscritto dopo alcune semplificazioni dà $\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 11c_1 + c_3 = 0 \\ 11c_2 + 10c_3 = 0 \end{cases}$.

Ricavando c_3 dalla seconda equazione e sostituendo nelle altre si ottiene $\begin{cases} c_1 + c_2 - 11c_1 = 0 \\ c_3 = -11c_1 \\ 11c_2 - 110c_1 = 0 \end{cases}$ che semplificato dà $\begin{cases} c_2 - 10c_1 = 0 \\ c_3 = -11c_1 \\ c_2 - 10c_1 = 0 \end{cases}$. Il sistema ha infinite soluzioni. Fissato un valore per c_1, ad esempio 1, risulta $c_3 = -11$ e $c_2 = 10$, quindi **a** –11**b** + 10**c** = **0**, cioè **a** + 10**c** = 11**b**. Questo vuol dire che 11 titoli di tipo **b** danno un rendimento equivalente a quello di un titolo di tipo **a** sommato a 10 di tipo **c**. In altre parole, l'investitore che volesse avere un rendimento di tipo **b** investendo una somma S, potrebbe senza alcun problema investire 1/11 di S in **a** e i restanti 10/11 di S in **c**.
Il titolo **b** si dice "sintetizzato" da **a** e **c**.

Base di uno spazio vettoriale

DEFINIZIONE: si chiama base di uno spazio vettoriale un insieme di vettori linearmente indipendenti che genera tutto lo spazio.

Ad esempio, i vettori fondamentali di uno spazio sono una base dello spazio stesso. In altre parole, una base di uno spazio di vettori è il più piccolo insieme di vettori capace di generare tutto lo spazio.

DEFINIZIONE: il numero di vettori che compongono una base di uno spazio si dice *dimensione* dello spazio vettoriale.

TEOREMA: Negli spazi di vettori a *n* componenti la dimensione è esattamente *n*.

OSSERVAZIONE: per il teorema appena enunciato, in R^3 occorrono tre vettori per formare una base.

Prodotto scalare di due vettori.

DEFINIZIONE: dati due vettori **a** e **b**, il loro "prodotto scalare" $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ è il numero che si ottiene moltiplicando ordinatamente le componenti dei due vettori e sommando i risultati. In simboli:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

ESEMPIO: dati i vettori $\mathbf{x}^1=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ il loro prodotto scalare è

$$\mathbf{x}^1\cdot\mathbf{x}^2=1\cdot(-2)+3\cdot1+4\cdot0=-2+3+0=1$$

OSSERVAZIONE: il prodotto scalare si chiama anche "prodotto interno" e si indica con il simbolo (**a**, **b**)

PROPRIETÀ

- il prodotto scalare di due vettori è un *numero*. L'insieme dei vettori, quindi, non è chiuso rispetto a questa operazione.
- il prodotto scalare di un vettore con se stesso è un numero positivo o nullo. È nullo solo se il vettore è il vettore nullo. Altrimenti è uguale alla somma dei quadrati delle componenti
- il prodotto scalare di due vettori è commutativo, cioè (**a**, **b**) = (**b**, **a**)

DEFINIZIONE: quando il prodotto scalare di due vettori è nullo i due vettori si dicono *ortogonali*.

OSSERVAZIONE: la motivazione di questo nome è dovuta all'analogia geometrica

ESEMPIO: i vettori **a** = (2, 3) e **b** = (–6, 4) sono ortogonali. Infatti (a, b) = 2 · (–6) + 3 · 4 = 0. Disegnando i due vettori sul piano si nota che essi corrispondono a vettori perpendicolari tra loro.

ESEMPIO: facendo riferimento al semplice mercato finanziario di cui sopra, è interessante osservare che i tre titoli sono tutti ortogonali al vettore $\begin{pmatrix}1\\1/1.1\\1/1.21\end{pmatrix}$ che rappresenta i fattori di sconto al tasso del 10% annuo composto. In un mercato come quello descritto, i titoli sono tutti ortogonali rispetto al vettore del tasso di equilibrio. Quando questo non succede, si verificano situazioni anomale.

Esercizi

1. Dati i vettori $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, dire se sono linearmente dipendenti o meno (settembre 2001)
2. Dati i vettori $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ dire se sono linearmente dipendenti.
3. Dati i vettori $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$ dire se sono linearmente dipendenti.
4. Calcolare il prodotto scalare dei vettori dell'esercizio 3

Soluzioni

1. Dati i vettori $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, dire se sono linearmente dipendenti o meno (settembre 2001). Se i vettori fossero dipendenti dovrebbe esistere una loro combinazione lineare a coefficienti non nulli che dà il vettore nullo. Cerchiamo questa combinazione. Siano c_1 e c_2 i coefficienti. Dobbiamo vedere se esiste una soluzione del sistema $\begin{cases} 3c_1 - 5c_2 = 0 \\ -5c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases}$ con c_1 e c_2 non contemporaneamente nulli. Ma risolvendo si trova come unica soluzione $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$ e quindi i vettori sono indipendenti. Questo metodo è generale ma essendo i vettori solo due si poteva osservare due vettori sono linearmente dipendenti quando sono proporzionali e i due vettori non lo sono.

2. Dati i vettori $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ dire se sono linearmente dipendenti. Basta cercare una soluzione non nulla al sistema $\begin{cases} c_1 - 2c_2 = 0 \\ 3c_1 + c_2 + 4c_3 = 0 \\ 4c_1 + 5c_3 = 0 \end{cases}$. Ricavando c_1 dalla prima equazione e sostituendo nelle altre due si ottiene $\begin{cases} c_1 = 2c_2 \\ 6c_2 + c_2 + 4c_3 = 0 \\ 8c_2 + 5c_3 = 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} c_1 = 2c_2 \\ 7c_2 + 4c_3 = 0 \\ 8c_2 + 5c_3 = 0 \end{cases}$ la cui unica soluzione è $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ e $c_3 = 0$. Non esistendo una combinazione lineare a coefficienti non nulli che dia il vettore nullo, i vettori sono linearmente indipendenti.

3. Dati i vettori $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$ dire se sono linearmente dipendenti. Procediamo analogamente al problema precedente. Cerchiamo una soluzione non nulla del sistema $\begin{cases} c_1 - c_2 + 2c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + 7c_3 = 0 \\ 4c_1 + c_2 + 13c_3 = 0 \end{cases}$. Ricavando c_1 dalla prima equazione e sostituendo nelle altre due si ottiene $\begin{cases} c_1 = c_2 - 2c_3 \\ 2c_2 - 4c_3 + c_2 + 7c_3 = 0 \\ 4c_2 - 8c_3 + c_2 + 13c_3 = 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} c_1 = c_2 - 2c_3 \\ 3c_2 + 3c_3 = 0 \\ 5c_2 + 5c_3 = 0 \end{cases}$. Il sistema nelle incognite c_2 e c_3 è indeterminato. Infatti ricavando, ad esempio, c_2 da una delle due equazioni si ottiene $c_2 = -c_3$ che è verificata identicamente anche dall'altra. Il sistema ha quindi infinite soluzioni che si possono ottenere lasciando indeterminata una delle incognite (ad esempio c_3) e determinando di conseguenza le altre: $c_2 = -c_3$ e $c_1 = c_2 - 2c_3 = -c_3 - 2c_3 = -3c_3$. Le soluzioni sono quindi le infinite triple $(-3c_3, -c_3, c_3)$. Ad esempio, scegliendo $c_3 = 2$, si ottiene $(-6, -2, 2)$. I vettori sono quindi dipendenti.

4. Calcolare il prodotto scalare dei vettori dell'esercizio 3.
   $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = -1+2+4=5$,
   $(\mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3) = -2+7+13=18$,
   $(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^3) = 2+14+52=68$

Lezioni 37-38

In questa lezione introdurremo il fondamentale concetto di matrice.

DEFINIZIONE: una matrice è una tabella rettangolare di numeri. Di norma si indica con una lettera maiuscola. Ad esempio, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ è una matrice con 2 righe e 3 colonne. I numeri della matrice sono detti elementi e sono indicati dalla corrispondente lettera minuscola con due indici, il primo per la riga ed il secondo per la colonna: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$. Per indicare le dimensioni di una matrice si dice anche, ad esempio, che "A è una matrice 2 x 3".

DEFINIZIONE: scambiando le righe con le colonne di una matrice, si ottiene un'altra matrice detta *trasposta* della matrice precedente. La matrice trasposta si indica con una T maiuscola. Nell'esempio precedente $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Naturalmente, la matrice trasposta ha le stesse dimensioni di quella originale solo se è quadrata.

PROPRIETÀ: la trasposta della trasposta è uguale alla matrice di partenza, in simboli $\left(A^T\right)^T = A$.

DEFINIZIONE: una matrice si dice quadrata se il numero di righe è uguale al numero di colonne. Nelle matrici quadrate, gli elementi con indici uguali (a_{kk}), quelli cioè che sono sulla diagonale del quadrato che unisce il vertice in alto a sinistra con quello in basso a destra costituiscono la *diagonale principale*.

DEFINIZIONI: una matrice quadrata che

- ha elementi diversi da 0 solo sulla diagonale principale, si chiama *matrice diagonale*
- ha tutti gli elementi sopra la diagonale principale uguali a zero si chiama *matrice triangolare bassa*
- ha tutti gli elementi sotto la diagonale principale uguali a zero si chiama *matrice triangolare alta*
- ha gli elementi simmetrici uguali (cioè è uguale alla sua trasposta) si dice *matrice simmetrica*

DEFINIZIONE: eliminando delle colonne e/o delle righe da una matrice si ottiene una sua sottomatrice.

OSSERVAZIONE: i vettori colonna possono essere pensati come particolari matrici aventi *n* righe e 1 colonna. Analogamente i vettori riga sono matrici con *n* colonne e 1 riga. Da questo punto di vista una matrice n x m può essere ottenuta allineando m vettori di R^n.

Operazioni con le matrici

Somma

La somma di matrici è possibile solo per matrici che hanno le stesse dimensioni. In tal caso la somma viene effettuata elemento per elemento. Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ allora $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Per la somma esiste l'equivalente dello 0 dei numeri ed è la matrice in cui tutti gli elementi sono 0. Tale matrice è detta *matrice nulla*.

Moltiplicazione per un numero

La moltiplicazione di una matrice per un numero è una conseguenza diretta della somma. Il prodotto di un numero *k* per una matrice A è una matrice che ha come elementi gli elementi di A moltiplicati per *k*. Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice 3*A* sarà uguale a $3A = \begin{pmatrix} 3 & 18 \\ -3 & -9 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

Moltiplicazione fra matrici

DEFINIZIONE: la moltiplicazione di due matrici A n x m e B p x q, si può effettuare solo se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B (cioè m = p). In tal caso, il generico elemento c_{ik} della matrice prodotto C = AB è dato dalla somma dei prodotti degli elementi della riga i-esima di A per gli elementi della colonna k-esima di B. In simboli:
$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$. Il risultato è una matrice n x q.

ESEMPIO: sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; la prima è una matrice 3 x 2 e la seconda è una matrice 2 x 4. Il prodotto quindi si può svolgere e il risultato sarà una matrice 3 x 4.

Svolgiamo i conti: c_{11} si ottiene sommando i prodotti della riga 1 di A per la colonna 1 di B: $c_{11} = 1 \times 2 + 6 \times 1 = 8$; c_{12} si ottiene sommando i prodotti della riga 1 di A per la colonna 2 di B: $c_{12} = 1 \times 0 + 6 \times 1 = 6$; analogamente per c_{13} e c_{14} che sono rispettivamente uguali a –13 e 3. c_{21} si ottiene sommando i prodotti della riga 2 di A per la colonna 1 di B: $c_{21} = -1 \times 2 - 3 \times 1 = -5$, e così via per tutti gli elementi. Alla fine si ottiene $C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -13 & 3 \\ -5 & -3 & 7 & -3 \\ 3 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

OSSERVAZIONI:

- il prodotto di matrici così definito è associativo, in simboli $(AB)C = A(BC)$;

- la matrice trasposta di un prodotto è uguale al prodotto delle matrici trasposte ma *nell'ordine inverso*, in simboli $(AB)^T = B^T A^T$;
- il prodotto di matrici *non* è commutativo, in generale quindi $AB \neq BA$. Ad esempio, si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Allora $AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ mentre $BA = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Questo si poteva intuire anche dalla definizione stessa che non tratta in modo simmetrico il primo ed il secondo fattore (A e B);
- chiaramente, se si moltiplica una matrice per una matrice nulla, si ottiene come risultato una matrice nulla (di opportune dimensioni). Tuttavia è possibile che moltiplicando fra loro due matrici diverse dalla matrice nulla si ottenga come risultato una matrice nulla. Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ risulta $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mentre $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$;
- si possono definire le potenze intere per le matrici. Il simbolo A^2 equivale ad A moltiplicata per se stessa. Questa operazione è possibile solo se la matrice è quadrata: infatti il numero di righe di A (il primo fattore) deve essere uguale al numero di colonne di A (il secondo fattore);
- le matrici diagonali con tutti gli elementi uguali a 1 si dicono matrici "unità" e si indicano con la lettera *I* (eventualmente con un indice per specificarne la dimensione). Esse sono l'elemento neutro della moltiplicazione; in altre parole, per qualunque matrice A, i prodotti AI e IA sono entrambi uguali ad A (I va ovviamente scelta della dimensione adatta a permettere lo svolgimento della moltiplicazione). Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, allora $AI = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e allo stesso modo $IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;
- la matrice unità è composta dai vettori fondamentali di R^n.

Matrice inversa

DEFINIZIONE: si dice matrice inversa di una matrice quadrata A la matrice quadrata B tale che $AB = BA = I$. La matrice B viene detta *matrice inversa* di A e indicata con il simbolo A^{-1}.

Nel seguito avrà particolare importanza la risoluzione di un particolare problema. Data una matrice quadrata A esiste la matrice inversa? La risposta a questa domanda è data dal seguente teorema.

TEOREMA: una matrice quadrata ammette inversa se e solo se i vettori colonna (o riga) da cui è composta sono linearmente indipendenti.

Esercizi

Per una serie di esercizi online, si può consultare il sito:
http://www.math.gatech.edu/~bourbaki/math2601/Java/matAlgebraTester.html
(il carattere ~ si può ottenere tenendo premuto il tasto Alt, premendo in successione i numeri 1, 2 e 6 sul tastierino numerico e rilasciando il tasto Alt)

Lezione 39-40

Determinante di una matrice

Il problema con cui abbiamo terminato la lezione precedente risulta modificato: dato un insieme di vettori, come si può stabilire se essi sono linearmente indipendenti? La risposta a questo problema viene fornita da un numero, calcolato a partire dagli elementi della matrice, che prende il nome di *determinante della matrice*. Tale numero si indica con l'espressione det(A).

La definizione del determinante è particolare e procederemo per gradi, esaminando dapprima i casi delle dimensioni 1, 2 e 3.

n = 1

In questo caso la matrice ha un solo elemento e il suo determinante è appunto l'elemento della matrice. Ad esempio, se A = (3) allora det(A)=3.

n = 2

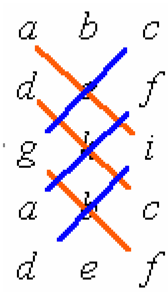
Sia A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Allora il determinante di A è il numero $\det(A) = ad - bc$. Ad esempio, data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ il suo determinante è $\det(A) = 1 \times 4 - 3 \times 2 = -2$. Che significato ha questo numero? Supponiamo che i vettori siano dipendenti. Essendo 2, la loro dipendenza implica che uno sia multiplo dell'altro. Allora, nella matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dovrà essere $b = ka$ e $d = kc$ e quindi il determinante sarà uguale a $\det(A) = ad - bc = akc - kac = 0$. Possiamo quindi concludere che *se i vettori sono dipendenti il determinante della matrice formata dai vettori è uguale a zero.* E quando i vettori sono indipendenti, che cosa rappresenta il determinante? La risposta è di tipo geometrico: il determinante è l'area (con segno) del parallelogramma formato dai due vettori.

n = 3

Sia A la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Estendiamo la matrice A replicando le prime due righe sotto l'ultima:

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{matrix}$$

e calcoliamo i prodotti degli elementi secondo lo schema seguente:



Allora, il determinante di A è il numero che si ottiene sommando tutti i prodotti così ottenuti presi col segno + se i prodotti sono lungo linee rosse (diagonali da sinistra a destra) e – se sono lungo linee blu (diagonali da destra a sinistra). Per esempio, data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ il suo determinante è $\det(A) = 1 + 0 - 6 + 4 - 2 + 0 = -3$. Questa regola è detta "regola di Sarrus".

Il caso generale

Supponiamo di avere una matrice quadrata di ordine *n* maggiore di 3.

REGOLA PER IL CALCOLO DEL DETERMINANTE: Ad ogni elemento associamo il segno + se la somma degli indici di riga e colonna è pari e il segno – se la somma degli indici di riga e colonna è dispari. In questo modo, ad ogni elemento della matrice è associato un segno secondo lo schema seguente

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Scegliamo ora una riga (o colonna) qualsiasi. Il determinante della matrice è uguale alla somma dei prodotti degli elementi della riga selezionata (presi con i corrispondenti segni) per i determinanti delle sottomatrici ottenute eliminando la riga e la colonna dell'elemento considerato. Tale regola va sotto il nome di **Teorema di Laplace**.

ESEMPIO: sia data la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Sovrapponiamo, per chiarezza, la matrice dei segni: $\begin{pmatrix} 1^+ & 2^- & 4^+ & 0^- \\ 0^- & 2^+ & 1^- & 3^+ \\ -1^+ & 2^- & -2^+ & -3^- \\ 0^- & 3^+ & 1^- & -1^+ \end{pmatrix}$. Scegliamo come riga la terza, i cui elementi sono –1, 2, –2 e –3.

Consideriamo il primo elemento, –1. Se eliminiamo la sua riga e la sua colonna si ottiene la sottomatrice $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Infatti bisogna eliminare la riga e la colonna bordate in rosso nella figura seguente:

$$\begin{pmatrix} 1^+ & 2^- & 4^+ & 0^- \\ 0^- & 2^+ & 1^- & 3^+ \\ -1^+ & 2^- & -2^+ & -3^- \\ 0^- & 3^+ & 1^- & -1^+ \end{pmatrix}$$

Poiché il suo segno è + prenderemo il prodotto col suo segno.
Passiamo al secondo elemento, 2 (che nel prodotto andrà preso col segno negativo). Eliminando la sua riga e la sua colonna si ottiene la sottomatrice quadrata $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, e così via. Risulta, infine,

$$\det(A) = -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il calcolo dei 4 determinanti porta al risultato finale che è –9. Si tratta di un conto molto laborioso e nella pratica i determinanti di ordine 4 e superiore non vengono svolti a mano ma con il calcolatore. Tuttavia conviene esercitarsi almeno una volta nello svolgimento di un conto di questo tipo, per consolidare le proprie abilità di calcolo.
La riga scelta per il calcolo non influisce sul risultato (che deve essere ovviamente uguale).

Proprietà dei determinanti

Nel seguito, il termine "linea" si deve intendere indifferentemente come "riga" o "colonna".

a) se si moltiplica una linea per una costante k il determinante della matrice risulta moltiplicato per k
b) se una linea è nulla, il determinante è 0
c) se si scambiano due linee parallele, il determinante cambia di segno
d) se due linee parallele sono uguali il determinante è 0
e) se una linea è multipla di un'altra linea ad essa parallela, il determinante è 0
f) se una linea è una combinazione lineare di altre linee ad essa parallele, il determinante è 0
g) se il determinante è 0 allora almeno una linea è combinazione lineare delle altre linee ad essa parallele (inversa della proprietà precedente)
h) se ad una linea si somma algebricamente una combinazione lineare di altre linee ad essa parallele, il determinante non cambia.
i) **TEOREMA DI BINET**: il determinante del prodotto di matrici (quadrate dello stesso ordine) è uguale al prodotto dei determinanti delle matrici, in simboli $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

DEFINIZIONE: una matrice quadrata si dice *singolare* se i suoi vettori colonna sono dipendenti (cioè almeno uno è combinazione lineare degli altri oppure esiste una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli che dà il vettore 0)

Con questo nuovo termine, la proprietà g) diventa il

TEOREMA: una matrice è singolare se e solo se il suo determinante è 0.

Torniamo ora al problema di stabilire se una matrice ha o meno un'inversa. Innanzi tutto notiamo che vale il seguente

TEOREMA: se una matrice *A* è invertibile, allora il suo determinante è diverso da zero.

DIMOSTRAZIONE: poiché la matrice è invertibile, esiste una matrice A^{-1} tale che $AA^{-1} = I$. Applicando il teorema di Binet si ha che $\det\left(AA^{-1}\right) = \det(A)\det\left(A^{-1}\right) = \det(I)$. Ma il determinante della matrice identità è 1, quindi:
a) il determinante di *A* non può essere 0, altrimenti il prodotto sarebbe 0
b) il determinante di *A* e l'inverso di quello della sua inversa A^{-1}.

Il teorema precedente ha anche un inverso.

TEOREMA: se il determinante di una matrice è diverso da zero, allora la matrice è invertibile.

OSSERVAZIONE: da un punto di vista pratico, quindi, sono equivalenti i seguenti concetti:
- il determinante di *A* è 0
- *A* non è invertibile
- le colonne (le righe) di *A* sono linearmente dipendenti

oppure, riformulando le stesse considerazioni da un altro punto di vista
- il determinante di *A* è diverso da 0
- *A* è invertibile
- le colonne (le righe) di *A* sono linearmente indipendenti

Risoluzione del problema del calcolo dell'inversa per una matrice 2x2

Quando la matrice è una 2x2 si possono dare delle formule semplici per il calcolo della matrice inversa. Sia data la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Il determinante è uguale a –4 e quindi la matrice è invertibile. La sua inversa è una matrice 2x2 $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ tale che $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Scrivendo il prodotto per esteso si ha $\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+2z & 3y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ da cui il sistema (di 4 equazioni nelle 4 incognite x, y, z e t) $\begin{cases} x+2z=1 \\ 3x+2z=0 \\ y+2t=0 \\ 3y+2t=1 \end{cases}$ che si risolve per sostituzione. Ricavando *x* dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene *x* = –1/2 e *z* = 3/4. Ricavando *y* dalla terza equazione e sostituendo nella quarta si ottiene *y* = 1/2 e *t* = –1/4. La matrice inversa è quindi $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Il problema si poteva porre anche in condizioni generali (e cioè sostituendo a 1, 2, 3, 2, valori arbitrari a, b, c e d). Data la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si ha $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Esercizi

1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici
   a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
   c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ (scegliere accuratamente la linea con cui fare i conti …)
2. Calcolare l'inversa delle seguenti matrici
   a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

Soluzioni

1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici
   a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = -2$
   b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = -7$
   c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 10$
2. Calcolare l'inversa delle seguenti matrici
   a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 \\ 0.05 & 0.1 \end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}^{-1}$ non esiste!

Lezione 41-42

Rango di una matrice

Il calcolo del determinante permette di stabilire se *n* vettori di R^n sono o meno indipendenti. Ma il determinante è un numero che si può calcolare solo se la matrice è quadrata (cioè se i vettori sono esattamente tanti quant'è la dimensione dello spazio). Lo strumento che permette di stabilire il numero di vettori linearmente indipendenti in una matrice si chiama *rango*.

DEFINIZIONE: si chiama *rango* di una matrice A il numero di colonne di A linearmente indipendenti.

OSSERVAZIONE: per quanto sappiamo, quando una matrice quadrata ha determinante diverso da zero i suoi vettori (che sono *n*) sono linearmente dipendenti: pertanto, *una matrice quadrata con determinante diverso da zero ha rango uguale alla dimensione dei vettori*.

Quando il determinante di una matrice quadrata è zero, invece, si sa che *almeno* uno dei vettori dipende linearmente dagli altri. Questo vuol dire che il rango di una tale matrice è sicuramente minore di *n* ma non sappiamo a priori il suo valore.

ESEMPIO: data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, si vede immediatamente che il suo determinante è nullo (le prime due colonne sono proporzionali). Il rango della matrice quindi non è 3, e potrebbe quindi essere 2, 1 o 0. Quanti sono i vettori indipendenti nella matrice? Poiché anche la terza colonna è multipla della prima, c'è un solo vettore linearmente indipendente (uno a scelta dei tre vettori colonna). Il rango della matrice è quindi 1.

Viceversa, data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, si può notare che la terza colonna è la somma delle prime due. Il determinante della matrice è 0 (perché i vettori non sono indipendenti). Il rango è 2 perché i primi due vettori sono indipendenti.

OSSERVAZIONE: una matrice ha rango 0 solo quando è la matrice nulla.

ATTENZIONE: il rango di una matrice è definito per *tutte* le matrici, mentre il determinante esiste solo per le matrici quadrate.

Naturalmente, il calcolo del rango di una matrice non può essere fatto solo "guardando" la matrice. Se si trovano immediatamente delle relazioni è utile ricavare immediatamente delle considerazioni, ma in generale questo non è possibile (per esempio, potrebbe essere difficile trovare "a occhio" la relazione tra le colonne di una matrice).

OSSERVAZIONE: il rango non dipende dalla scelta del tipo di linea (riga o colonna). Si può dare una definizione (analoga a quella precedente) di *rango* per righe. Si dimostra che le due definizioni sono equivalenti. Pertanto, il rango di una matrice non può superare il minimo tra il numero di righe e di colonne della matrice stessa.

Come si calcola il rango di una matrice?

Diamo prima una semplice definizione.

DEFINIZIONE: si chiama *minore* di una matrice, il determinante di una sottomatrice *quadrata* estratta dalla matrice data. Si dice ordine del minore la dimensione della sottomatrice estratta.

ESEMPIO: data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, da essa si posso estrarre 3 minori di ordine 2 eliminando una delle 3 righe: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. I tre minori valgono rispettivamente –6, –9 e –3.

TEOREMA: il rango di una matrice è il massimo ordine dei minori non nulli di una matrice.

Poiché si tratta di calcolare il massimo tra un certo insieme di numeri (che è sicuramente finito perché va da 0 al minimo tra il numero di righe e di colonne della matrice) le operazioni si svolgono di solito in questo modo

1. se la matrice è nulla, il rango è 0
2. se la matrice ha almeno un elemento diverso da 0, il rango è almeno 1
3. se la matrice ha almeno un minore di ordine 2 diverso da 0 formato con l'elemento che si è trovato al punto precedente, allora il rango è almeno 2, altrimenti il rango è 1
4. se la matrice ha almeno un minore di ordine 3 diverso da 0 formato con il minore che si è trovato al punto precedente, allora il rango è almeno 3, altrimenti il rango è 2

e così via, ragionando sempre su minori costruiti a partire dal precedente minore *diverso da 0 orlando* il minore con altri elementi.

ESEMPIO: calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 11 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Si tratta di una matrice 4x3 quindi il suo rango è al massimo 3. Inoltre, poiché non si tratta della matrice nulla, il suo rango è almeno 1. A questo punto prendiamo un minore a caso di ordine 2, quello in alto a sinistra $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Il suo determinante è –5 e quindi la matrice ha rango almeno 2. Per avere rango 3 dovrebbe esistere un minore di ordine 3 (contenente il minore che abbiamo appena considerato) che ha determinante diverso da 0. Quanti sono i minori di ordine 3 che contengono il minore $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$? Sono 2, quelli che si ottengono orlando il minore con la terza colonna e, rispettivamente, con la terza e la quarta riga: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 11 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Il primo ha determinante nullo. Il secondo ha determinante uguale a 20. Poiché abbiamo trovato un minore di ordine 3 diverso da zero il rango della matrice A è 3. Se i due minori fossero stati entrambi nulli, il rango sarebbe stato 2.

OSSERVAZIONE: quando la matrice è quadrata, conviene in taluni casi calcolare prima il determinante: se esso è diverso da zero, il rango è uguale alla dimensione della matrice, altrimenti è minore.

ESEMPIO: calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Il determinante di A è 0 e quindi il rango della matrice è minore di 3. Tuttavia esiste un minore di ordine 2 (quello in alto a sinistra, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$) che ha determinante diverso da zero. Pertanto, il rango di A è 2.

Esercizi

1. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcolare $(AA^{\mathrm{T}})^{-1}$ (settembre 2001)
2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Calcolare la matrice inversa A^{-1} e utilizzando questo risultato, risolvere il sistema lineare $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 5y = 2 \end{cases}$ (luglio 2000)
3. Dati i vettori $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ dire se sono linearmente indipendenti.
4. Calcolare il rango delle seguenti matrici
   a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$
   c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
   d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (svolgere prima l'esercizio c))
   e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (svolgere prima l'esercizio e))
5. I vettori (1, 2) e (*k*, 6) sono linearmente dipendenti per a) *k* = 0 b) *k* = 3 c) per ogni *k* d) per nessun valore di *k* (prova parziale 1994)
6. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Allora det(*A*) è a) –7 b) un numero irrazionale c) 0 d) 7
7. I vettori (1, *k*, –2), (–2, *k*, 4) e (0, 4, 2) sono linearmente indipendenti a) solo per *k* = –2 b) per ogni *k* diverso da 0 c) per ogni *k* d) solo per *k* = 0

Soluzioni

1. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcolare $(AA^T)^{-1}$. La trasposta della matrice A è $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e il prodotto AA^T è uguale a $AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Questa matrice ha determinante uguale a 3 ed è quindi invertibile. La sua inversa è, in base alla regola enunciata nella lezione 39-40, $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.
2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Calcolare la matrice inversa A^{-1} e utilizzando questo risultato, risolvere il sistema lineare $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 5y = 2 \end{cases}$. La matrice inversa si calcola rapidamente utilizzando la formula della lezione 39-40. Poiché il determinante di A è 1 si ha $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   Il sistema proposto si può scrivere nella forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. La soluzione è quindi
   $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$, cioè $x = 9$ e $y = 4$
3. Dati i vettori $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ dire se sono linearmente indipendenti. Poiché si tratta di 3 vettori di R^3 si possono accostare a formare la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e calcolare il determinante di A. Applicando la regola di Sarrus, esso risulta uguale a 3, ed essendo diverso da zero ci dice che i tre vettori sono indipendenti.
4. Calcolare il rango delle seguenti matrici
   a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. Poiché il determinante è 0, la matrice ha rango 1 (esiste infatti almeno un elemento diverso da zero)
   b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Poiché il determinante è diverso da zero, la matrice ha rango 2.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Poiché il determinante è uguale a zero, il rango è minore di 3. Il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da zero e quindi la matrice ha rango 2

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Sappiamo già che la matrice formata dalle prime tre righe ha rango 2 e che il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ è diverso da zero. Orliamo quindi questo minore con *la quarta riga* (e la terza colonna) per ottenere la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, il cui determinante è uguale a 5. La matrice ha quindi rango 3.

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il determinante è diverso da zero e quindi la matrice ha rango 3

f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Poiché esiste un minore di questa matrice uguale alla matrice del punto precedente, la matrice ha almeno rango 3. Ma non può avere rango uguale a 4, quindi ha rango 3.

5. I vettori (1, 2) e (k, 6) sono linearmente dipendenti per a) $k = 0$ b) $k = 3$ c) per ogni k d) per nessun valore di k (prova parziale 1994). Perché siano dipendenti, essendo solo 2 vettori di R^2, la matrice formata dai vettori deve avere determinante nullo. La matrice è $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ e il suo determinante è $6 - 2k$ che si annulla per $k = 3$. La risposta giusta è la b)
6. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Allora det($A$) è a) –7 b) un numero irrazionale c) 0 d) 7. Si tratta di una matrice 4x4 ma il calcolo risulta molto semplice se si sceglie per lo sviluppo la prima colonna in cui compaiono 3 zeri. Nei passaggi successivi, scegliendo sempre le righe con il maggior numero di zeri si ottiene il risultato.

$$\det(A) = -7\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -7 \cdot 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -7$$

7. I vettori (1, k, –2), (–2, k, 4) e (0, 4, 2) sono linearmente indipendenti a) solo per $k = -2$ b) per ogni k diverso da 0 c) per ogni k d) solo per $k = 0$. Affianchiamo i tre vettori per formare la

matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ k & k & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ il cui determinante è $6k$. Il determinante si annulla quando $k = 0$ e quindi in questo caso i vettori sono dipendenti. La risposta giusta è la b)

Lezione 42-43

Scrittura dei sistemi lineari in forma di matrice

Da questa lezione ci occuperemo della teoria della risoluzione dei sistemi lineari (di primo grado) con l'aiuto delle matrici. Vedremo che, oltre alle procedure risolutive, esistono teoremi in grado di dire se il sistema è risolubile e con quante soluzioni. Prima di iniziare, ricordiamo qualche definizione essenziale.

DEFINIZIONE: si dice soluzione di un sistema lineare di *n* equazioni in *m* incognite una *n*-upla di numeri che, sostituiti alle incognite in tutte le equazioni, rendono vere le uguaglianze.

Dato ad esempio il sistema $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$, la coppia $x = 1$ e $y = 2$ è *una* soluzione del sistema.

Nel seguito scriveremo i sistemi lineari in forma di matrice e cioè nella forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{x}$ è il vettore delle incognite e $\mathbf{b}$ è il vettore dei termini noti. Ad esempio, il sistema precedente scritto in forma matriciale diventa $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

DEFINIZIONE: il sistema si dice:

- *possibile* se esiste almeno una soluzione. In questo caso se il sistema ha solo una soluzione si dice *determinato*, altrimenti si dice *indeterminato*.
- *impossibile* se non esiste nessuna soluzione
- *omogeneo* se il vettore dei termini noti (**b**) è il vettore nullo.

La matrice A si dice *matrice dei coefficienti* (o matrice incompleta) e la matrice A|**b**, ottenuta orlando a destra la matrice A con la colonna dei termini noti, si dice *matrice completa*.

Proseguendo nell'esempio precedente, la matrice completa è $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Il teorema di Rouché Capelli

TEOREMA: un sistema è possibile se e solo se il rango della matrice completa e di quella incompleta coincidono.

Di particolare importanza è anche il seguente

TEOREMA: quando ammette soluzioni, il sistema ha una sola soluzione se il rango *r* delle matrici completa e incompleta coincidono con il numero *n* delle incognite. Altrimenti, le soluzioni sono infinite e dipendono da *n* – *r* parametri. Questi *n* – *r* parametri sono le incognite che *non* sono coinvolte nel calcolo del rango *r* della matrice incompleta

PROCEDURA DI RISOLUZIONE: prevede innanzi tutto la determinazione dei ranghi delle due matrici completa e incompleta. Se questi sono diversi, il sistema è impossibile e non è necessaria altra discussione. Se invece sono uguali e uguale è anche il numero delle incognite, allora il sistema ha una sola soluzione, altrimenti ha *n* – *r* soluzioni. In quest'ultimo caso, si spostano al di là del segno di uguale le incognite non coinvolte nel calcolo del rango e si risolve rispetto alle sole incognite che compaiono a sinistra considerando solo le equazioni coinvolte nel calcolo del rango.

ESEMPIO: dato il sistema $\begin{cases} 3x+5y+z=1 \\ 2x+z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$, la sua scrittura in forma di matrice è

$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. La matrice incompleta $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 3 (il suo determinante è –6). La matrice completa ha anch'essa rango 3 (non può aere rango superiore perché ha 3 righe e 4 colonne). Il sistema è quindi possibile. Poiché il rango coincide con il numero delle incognite il sistema ammette una sola soluzione. Per trovare la soluzione si può procedere, per esempio, con il metodo di sostituzione (ma nella prossima lezione studieremo un metodo generale e in taluni casi più rapido).

ESEMPIO: dato il sistema $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$, la sua scrittura in forma di matrice è $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Il rango della matrice incompleta è 2 perché, ad esempio, il minore $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è diverso da 0 (vale –3). La matrice completa è $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ed ha rango 3 perché il suo determinante è –1. Quindi il sistema non è possibile

ESEMPIO: dato il sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-2z=2 \end{cases}$ la sua scrittura in forma di matrice è

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Il rango della matrice incompleta è 2 perché, ad esempio, il minore $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è diverso da 0 (vale –2). Il rango della matrice completa è anch'esso due e il sistema è quindi possibile. Poiché il numero delle incognite è 3 le soluzioni dipendono da 3 – 2 = 1 parametro. Per calcolare il rango della matrice abbiamo usato il minore $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ che corrisponde alle incognite *x* e *y*. Possiamo quindi risolvere il sistema portando l'altra incognita, la *z*, al di là del segno di uguale e risolvere il nuovo sistema $\begin{cases} x+y=1-z \\ x-y=2+2z \end{cases}$. Per trovare le soluzioni si possono, ad esempio, sommare le equazioni per trovare $2x=3+z$ da cui $x=\frac{3+z}{2}$ e di conseguenza $y=\frac{-3z-1}{2}$, cioè $\begin{pmatrix} \frac{3+z}{2} & \frac{-3z-1}{2} & z \end{pmatrix}$. Conviene sempre verificare che le soluzioni siano effettivamente tali. Le soluzioni sono infinite, nel senso che una soluzione del sistema è ottenuta assegnando un valore arbitrario a z e i corrispondenti valori a x e y. Poiché il valore di z è arbitrario, le soluzioni sono in realtà infinite.

Sistemi omogenei

Per i sistemi omogenei la discussione è facilitata. Se infatti il vettore dei termini noti è il vettore nullo, orlando la matrice incompleta con una colonna di zeri si ottiene per forza una matrice con lo stesso rango della precedente: il sistema quindi è sempre possibile. Alla stessa conclusione si arriva osservando che la n–upla di zeri è sempre una soluzione del sistema e quindi il sistema è automaticamente risolubile!
Pertanto, quando si ha a che fare con un sistema omogeneo, il problema che rimane è solo quello di stabilire se la soluzione è unica oppure no, calcolando il rango della matrice dei coefficienti e confrontandolo con il numero delle incognite.

ESEMPIO: sia dato il sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ 2x+3z=0 \end{cases}$. Si tratta di un sistema omogeneo. La matrice dei coefficienti è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e il suo determinante è 0. Il suo rango quindi è minore di 3. Dato che il minore $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è uguale a –2, il suo rango è due. Esistono quindi infinite soluzioni dipendenti da un parametro. Per trovarle, dato che il minore considerato è quello delle incognite x e y, spostiamo al di là la z e risolviamo il sistema $\begin{cases} x+y=-z \\ x-y=-2z \end{cases}$. Sommando si ha $2x=-3z$ cioè $x=-\frac{3}{2}z$ da cui si ricava $y=\frac{1}{2}z$. Chiamando il parametro con un altro nome, t, le infinite soluzioni sono quindi
$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t & \frac{1}{2}t & t \end{pmatrix}$

Per i sistemi omogenei vale il seguente

TEOREMA: in un sistema omogeneo le soluzioni sono un sottospazio di R^n, cioè una combinazione lineare di soluzioni dà luogo ad un’altra soluzione.

Un altro importante risultato lega le soluzioni di un sistema lineare generico a quelle del sistema omogeneo ad esso associato.

DEFINIZIONE: dato un sistema lineare si dice sistema omogeneo associato il sistema omogeneo che ha la stessa matrice dei coefficienti del sistema dato.

ESEMPIO: dato il sistema $\begin{cases} 3x+5y+z=1 \\ 2x+z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ il suo sistema omogeneo associato è $\begin{cases} 3x+5y+z=0 \\ 2x+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

TEOREMA: le soluzioni di un sistema lineare sono date da una qualsiasi soluzione $\mathbf{x}^0$ del sistema sommata a *tutte* le soluzioni $\mathbf{z}$ del sistema omogeneo associato.

OSSERVAZIONE: Naturalmente, il teorema è significativo solo se il numero di soluzioni del sistema omogeneo associato è infinito.

ESEMPIO: dato il sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-2z=2 \end{cases}$ il suo sistema omogeneo associato è $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$.

Supponiamo di sapere che $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è una soluzione del sistema. Risolvendo il sistema omogeneo si ha $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ -\frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix}$ Si può allora dire che *tutte* le soluzioni del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-2z=2 \end{cases}$ sono riassunte nella formula $\mathbf{x}^0 + \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ -\frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{t}{2} \\ 1-\frac{3}{2}t \\ -1+t \end{pmatrix}$

OSSERVAZIONE: supponiamo di avere due soluzioni di un sistema $\mathbf{x}^1$ e $\mathbf{x}^2$. Esse possono essere scritte come $\mathbf{x}^1 = \mathbf{z}^1 + \mathbf{x}^0$ e $\mathbf{x}^2 = \mathbf{z}^2 + \mathbf{x}^0$, cioè sono ottenute sommando una soluzione particolare ($\mathbf{x}^0$) a due soluzioni diverse del sistema omogeneo ($\mathbf{z}^1$ e $\mathbf{z}^2$). Ma allora $\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2 = \mathbf{z}^1 + \mathbf{x}^0 - \mathbf{z}^2 - \mathbf{x}^0 = \mathbf{z}^1 - \mathbf{z}^2$, cioè la loro differenza è uguale alla differenza di due soluzioni di un sistema omogeneo. Queste soluzioni sono un sottospazio e una loro qualsiasi combinazione lineare è anch'essa una soluzione del sistema omogeneo. In altre parole, date due soluzioni di un sistema, la loro differenza è una soluzione del sistema omogeneo associato.

Esercizi

1. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 0 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 5y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + 5z = 2 \\ 2x + 4y + 8z = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x + y + 2z = 5 \\ 2x - 2y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - y - 5z = 0 \\ x - 5y - 4z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

Risolvere e discutere in dipendenza dal parametro reale a

6. $\begin{cases} 3x + y - z = a \\ x - y + az = 1 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ x + y - 2z = a \\ x + ay - 2z = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y = a \\ 3x - ay - z = 2a - 2 \end{cases}$

Soluzioni

1. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 0 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases}$ Il sistema è impossibile. Il rango della matrice completa e incompleta sono diversi.
2. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 5y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ Una sola soluzione (0, 0, 0). Si tratta di un sistema omogeneo. Il rango della matrice dei coefficienti è 3 uguale al numero delle incognite e quindi c'è una sola soluzione, la soluzione nulla.
3. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + 5z = 2 \\ 2x + 4y + 8z = 3 \end{cases}$ Infinite soluzioni dipendenti da un parametro (k, –1/4 – k/2, 1/2). Il rango della matrice incompleta e di quella completa coincidono e sono uguali a 2. Il minore utilizzato per il rango *non* può essere quello in alto a sinistra perché è nullo.
4. $\begin{cases} 4x + y + 2z = 5 \\ 2x - 2y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$ Il sistema è impossibile. Il rango della matrice completa e incompleta sono diversi. Si poteva anche notare che la terza equazione è la differenza delle prime due nella parte delle incognite ma *non* lo è nella parte dei termini noti
5. $\begin{cases} 2x - y - 5z = 0 \\ x - 5y - 4z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ Infinite soluzioni dipendenti da un parametro (7k, – k, 3k)

Risolvere e discutere in dipendenza dal parametro reale *a*

6. $\begin{cases} 3x + y - z = a \\ x - y + az = 1 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ Per *a* = 5 è impossibile altrimenti ha una sola soluzione
7. $\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ x + y - 2z = a \\ x + ay - 2z = 0 \end{cases}$ Per *a* = 1 è impossibile altrimenti ha una sola soluzione
8. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y = a \\ 3x - ay - z = 2a - 2 \end{cases}$ Per *a* = –1 ha infinite soluzioni, altrimenti ha una sola soluzione

Lezione 44

Dimostrazione del teorema di Rouché Capelli

Ripetiamo l'enunciato del teorema.

TEOREMA: un sistema è possibile se e solo se il rango della matrice completa e di quella incompleta coincidono.

DIMOSTRAZIONE: pensiamo la matrice dei coefficienti A come ottenuta affiancando le sue colonne $\mathbf{a}^1$, $\mathbf{a}^2$, …, $\mathbf{a}^n$. Allora il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si può pensare come $\mathbf{a}^1 x_1 + \mathbf{a}^2 x_2 + \ldots \mathbf{a}^n x_n = \mathbf{b}$. Ora notiamo che se il sistema è possibile, cioè se esistono dei valori delle incognite che rendono vera l'uguaglianza, il vettore **b** è combinazione lineare dei vettori colonna della matrice A. Questo vuol dire che, il rango di A non può mutare passando da A ad A|**b**, perché abbiamo aggiunto un vettore linearmente dipendente dai vettori di A. Quindi il rango (che conta i vettori linearmente indipendenti) deve rimanere uguale.
Viceversa, supponiamo di sapere che i due ranghi sono uguali. Allora, necessariamente, deve esistere una combinazione lineare dei vettori colonna che dà il vettore **b**, perché **b** non può essere indipendente dagli altri vettori. Ma allora deve valere di nuovo la relazione $\mathbf{a}^1 x_1 + \mathbf{a}^2 x_2 + \ldots \mathbf{a}^n x_n = \mathbf{b}$ e x_1, x_2, … (che sono i coefficienti della combinazione lineare) sono le soluzioni del sistema.

Sistemi di Cramer

DEFINIZIONE: i sistemi con matrice dei coefficienti quadrata in cui il rango è uguale alla dimensione della matrice (e quindi è massimo) si chiamano *sistemi di Cramer*.

OSSERVAZIONE: per quanto è già stato detto precedentemente, tali sistemi sono possibili e hanno una sola soluzione.

OSSERVAZIONE: in una matrice quadrata il rango è massimo solo quando il suo determinante è diverso da zero. Quindi vale il seguente teorema.

TEOREMA: un sistema quadrato (con *n* equazioni e *n* incognite) ha una sola soluzione se e solo se la matrice dei coefficienti ha determinante diverso da 0.

Risoluzione dei sistemi con la regola di Cramer

Per i sistemi di Cramer la scrittura in forma di matrice di un sistema permette di trovare rapidamente una formula risolutiva. Sia $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ il sistema dato. Allora, moltiplicando entrambi i membri (a sinistra) per A^{-1} si ottiene $A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, cioè $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. La soluzione si trova quindi determinando prima l'inversa della matrice dei coefficienti e moltiplicandola per il vettore dei termini noti.

Il calcolo dell'inversa

In generale il calcolo dell'inversa della matrice A è abbastanza difficoltoso senza il calcolatore. Abbiamo già dato una formula per l'inversa di una matrice 2x2; per le matrici di ordine superiore introduciamo prima un paio di notazioni e poi diamo una formula generale.

DEFINIZIONE: si dice complemento algebrico di un elemento a_{ik} di una matrice quadrata il determinante del minore che si ottiene eliminando dalla matrice la riga e la colonna dell'elemento considerato moltiplicato per il segno + o – a seconda che la somma degli indici sia pari o dispari. Il complemento algebrico di un elemento si indica con la maiuscola della stessa lettera dell'elemento con gli indici (A_{ik}).

DEFINIZIONE: si chiama *matrice aggiunta* della matrice A la matrice *trasposta* dei complementi algebrici.

OSSERVAZIONE: la matrice inversa di una matrice quadrata A è la matrice aggiunta moltiplicata per 1/det(A).

ESEMPIO: sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Esaminiamola elemento per elemento per trovare i complementi algebrici.

a_{11} = 1 e A_{11} = –1 (il determinante di $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$)

a_{12} = 2 e A_{12} = –2 (il determinante di $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ cambiato di segno)

a_{13} = 3 e A_{13} = 1 (il determinante di $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

a_{21} = 1 e A_{21} = –1 (il determinante di $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ cambiato di segno)

a_{22} = 0 e A_{22} = 2 (il determinante di $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$)

a_{23} = 1 e A_{23} = –1 (il determinante di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cambiato di segno)

a_{31} = 0 e A_{31} = 2 (il determinante di $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

a_{32} = 1 e A_{32} = 2 (il determinante di $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ cambiato di segno)

a_{33} = 2 e A_{33} = –2 (il determinante di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$)

La matrice dei complementi algebrici è dunque $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ e la matrice aggiunta è

$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Poiché il determinante di A è –2, la matrice inversa è

$$\frac{1}{\det(A)}\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Tale calcolo risulta comunque laborioso ma si presta ad una semplificazione. Infatti vale la seguente regola.

REGOLA DI CRAMER: in un sistema di Cramer si indichino con D il determinante della matrice dei coefficienti e con D_1, D_2, ecc. i determinanti delle matrici ottenute a partire dalla matrice dei coefficienti sostituendo alla prima, seconda, ecc. colonna la colonna dei termini noti. La soluzione è allora data dagli *n* numeri D_1/D, D_2/D, D_3/D, … D_n/D.

ESEMPIO: sia dato il sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y - z = -4 \end{cases}$. Il sistema si scrive nella forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Allora $D = \det(A) = 4$, $D_1 = \det\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 4$,

$D_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = 8$ e $D_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} = 12$. Le soluzioni sono $x = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{4} = 1$,

$y = \frac{D_2}{D} = \frac{8}{4} = 2$ e $z = \frac{D_3}{D} = \frac{12}{4} = 3$

Esercizi

1. Si consideri il sistema A**x** = **b**, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ k \end{pmatrix}$ con *k* numero reale. Stabilire per quale valore di *k* il sistema ammette soluzioni e calcolare queste soluzioni
2. Sia dato il sistema A**x** = **b**, dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$. Trovarne tutte le soluzioni.
3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Determinare per quali valori di *k* il sistema A**x** = *k***x** ammette infinite soluzioni. Successivamente, risolvere il sistema A**x** = 5**x**
4. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$. Calcolarne l'inversa e usare il risultato per risolvere il sistema $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -3x + 7y = 2 \end{cases}$.

Soluzioni

1. Si consideri il sistema A**x** = **b**, dove $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}$ e $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}4\\ k\end{pmatrix}$ con *k* numero reale. Stabilire per quale valore di *k* il sistema ammette soluzioni e calcolare queste soluzioni. La matrice A ha determinante nullo ed ha quindi rango 1. La matrice A|**b** è $A\,|\,\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -3 & 6 & k\end{pmatrix}$ e per determinare il suo rango osserviamo ci sono tre minori di ordine 2, $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 4\\ -3 & k\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 6 & k\end{pmatrix}$. Il primo è nullo. Il secondo vale *k* + 12 e il terzo –2*k* – 24. Entrambi si annullano per *k* = –12, quindi questo è l'unico valore per cui la matrice completa ha rango 1.
   Per *k* = –12 esistono soluzioni e poiché *n* – *r* = 1 esse sono infinite e dipendono da un parametro. Considerando come minore non nullo del primo ordine il primo elemento in alto a sinistra della matrice, il sistema si riscrive nella sola equazione $x=2y+4$. Le soluzioni sono quindi date dalle infinite coppie $\begin{pmatrix}2\alpha+4\\ \alpha\end{pmatrix}$ al variare di α nei numeri reali.

   Osserviamo che se per un dato valore di *k* uno dei due minori fosse stato nullo e l'altro no, allora la matrice avrebbe avuto rango 2!
2. Sia dato il sistema A**x** = **b**, dove $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ e $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}3\\ -5\end{pmatrix}$. Trovarne tutte le soluzioni. Il rango di A è 2 perché il minore $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ è diverso da 0. Anche il rango della matrice completa è 2 e quindi il sistema è possibile e ha infinite soluzioni dipendenti da 3 – 2 = 1 parametro. Possiamo risolvere il sistema $\begin{cases}x+y=3\\ x=-5-z\end{cases}$ ricavando *y* dalla prima equazione. Si ottiene $y=3-x=3-(-5-z)=8+z$. Le soluzioni sono dunque $\begin{pmatrix}-5-k\\ 8+k\\ k\end{pmatrix}$ al variare di *k*.

3. Sia $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$. Determinare per quali valori di *k* il sistema A**x** = *k***x** ammette infinite soluzioni. Successivamente, risolvere il sistema A**x** = 5**x**. Il sistema A**x** = *k***x** si può riscrivere come $(A-kI)\mathbf{x}=0$, cioè come sistema omogeneo con matrice dei coefficienti uguale a *B* =*A* – *kI*, cioè $B=\begin{pmatrix}1-k & -4 & 3\\ -1 & 1-k & 0\\ 0 & 0 & 5-k\end{pmatrix}$. Dato che si tratta di un sistema omogeneo, è sempre possibile. Perché abbia infinite soluzioni è necessario che il rango della matrice dei coefficienti sia minore di 3 e quindi che il determinante di *B* sia zero. Calcoliamo il determinante di *B* sviluppando secondo l'ultima riga: $\det(B)=(5-k)\left[(1-k)^2-4\right]=(5-k)(k^2-2k-3)$. Questa

espressione si annulla per $k = 5$, $k = -1$ e $k = 3$. Questi sono i valori per cui il sistema ammette infinite soluzioni. Per $k = 5$ il sistema diventa $\begin{pmatrix} -4 & -4 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il minore $\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ è diverso da zero e quindi la matrice incompleta ha rango 2. Risolviamo quindi rispetto alle incognite e alle equazioni del minore considerato. $\begin{cases} -4x - 4y = -3z \\ -x - 4y = 0 \end{cases}$. Sottraendo le equazioni si ottiene $-3x = -3z$, cioè $x = z$ e dalla seconda equazione si ha $y = 1/4\, z$. Le soluzioni sono quindi $\begin{pmatrix} k \\ \frac{k}{4} \\ k \end{pmatrix}$

4. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$. Calcolarne l'inversa e usare il risultato per risolvere il sistema $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -3x + 7y = 2 \end{cases}$. L'inversa si calcola rapidamente usando la formula che abbiamo dato nelle lezioni precedenti. Si ha $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, poiché il det(A) = 1. Il sistema può essere scritto nella forma A**x** = **b**, dove $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e quindi la sua soluzione è $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$ o, in altre parole, $x = 11$ e $y = 5$.

Lezione 45-46

Funzioni da R^n a R^m

DEFINIZIONE: si dice *funzione vettoriale di variabile vettoriale (da R^n a R^m)* una legge **f** che associa vettori di R^m a vettori di R^n. In dipendenza dal numero *n* delle componenti del vettore di R^n la funzione si dice a 2, 3, o *n* variabili. Quando *m* = 1, la funzione si dice *scalare* e non vettoriale. In simboli si scrive $\mathbf{f}: R^n \to R^m$ o, per evidenziare argomento ed immagine, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ con $\mathbf{x} \in R^n$ e $\mathbf{y} \in R^m$. Si noti che **f**, **x** e **y** sono indicati col segno di vettore.

Si tratta della solita definizione di funzione in cui il dominio è l'insieme dei vettori di R^n e il codominio è l'insieme dei vettori di R^m.

ESEMPI:

- la funzione $A(b,h)=b \cdot h$ che riceve in ingresso due numeri, *b* e *h*, e associa l'area del rettangolo di dimensioni *b* e *h* è una funzione scalare di due variabili;
- si supponga che un'azienda utilizzi per la produzione due macchine utensili e che produca due tipi di prodotto. La funzione che riceve in ingresso il quantitativo di pezzi da produrre di ogni tipo e in uscita il numero di ore per cui ogni macchina è impegnata è una funzione vettoriale di due variabili (una funzione da R^2 a R^2).

DEFINIZIONE: una funzione si dice additiva se $\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{x}') = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}')$
DEFINIZIONE: una funzione si dice omogenea se $\mathbf{f}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{f}(\mathbf{x})$ per ogni numero α.
DEFINIZIONE: le funzioni che sono additive e omogenee si dicono *lineari*.

La moltiplicazione di un vettore per una matrice è un'operazione lineare. Essa infatti è additiva e omogenea, per cui la funzione **f**(**x**) = A**x** è una funzione lineare. La cosa interessante è che *tutte* le funzioni lineari sono di questo tipo, come afferma il seguente teorema.

TEOREMA: $\mathbf{f}: R^n \to R^m$ è lineare se e solo se a **f** è possibile associare una matrice **A** tale che **f** sia rappresentata dalla relazione **f**(**x**) = A**x**. La matrice **A** è unica una volta fissate le basi (eventualmente canoniche) in R^n e R^m.

OSSERVAZIONE: per le funzioni lineari si usa anche il termine "applicazione lineare"

Lo studio delle funzioni lineari si riduce quindi allo studio delle matrici che abbiamo già approfondito nelle lezioni precedenti.

ESEMPIO: sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ una matrice. A quale funzione lineare è associata? Poiché la matrice è 2 x 3, l'applicazione lineare va da R^3 a R^2. Queste sono infatti le uniche dimensioni che rendono possibile la moltiplicazione per un vettore. L'immagine del generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è il vettore $\begin{pmatrix} 2a+b+3c \\ -a+4c \end{pmatrix}$ che è il risultato della moltiplicazione $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

ESEMPIO: data la matrice A dell'esempio precedente

1. trovare le immagini del vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
2. stabilire quali sono le controimmagini del vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La risposta alla prima domanda è semplice: basta calcolare il prodotto $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -14 \end{pmatrix}$.

Per quanto riguarda la seconda, ci chiediamo se esistono (e quali sono) i vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si tratta quindi di risolvere il sistema $\begin{cases} 2x+y+3z=2 \\ -x+4z=1 \end{cases}$. La matrice A ha rango 2 e quindi il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro. Se scegliamo come minore la sottomatrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (e quindi risolviamo rispetto a x e y) la soluzione è $x = 4z - 1$ e $y = 2 - 3z - 2x = 4 - 11z$. Quindi i vettori controimmagine di $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono i vettori della forma $\begin{pmatrix} 4k-1 \\ 4-11k \\ k \end{pmatrix}$.

Immagine e nucleo di un'applicazione lineare

Due insiemi sono particolarmente importanti quando si ha a che fare con le applicazioni lineari.

DEFINIZIONE: si chiama *immagine* di un'applicazione lineare **f** il sottoinsieme di R^m costituito da tutti i vettori che sono immagine di un qualche vettore nel dominio. L'insieme immagine si indica di solito come $\mathbf{f}(R^n)$.

OSSERVAZIONE: se $\mathbf{x} \in R^n$, allora $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} = \mathbf{a}^1 x_1 + \mathbf{a}^2 x_2 + \ldots \mathbf{a}^n x_n$, cioè l'immagine di un qualunque vettore di R^n è una combinazione lineare delle colonne di A. Pertanto vale il seguente risultato

TEOREMA: l'immagine di un'applicazione lineare **f** è un sottospazio di R^m ed ha dimensione uguale al rango di A

Da questo punto di vista, il teorema di Rouché Capelli si può riformulare nel modo seguente.

TEOREMA (Rouché Capelli): un sistema è possibile se e solo se **b** appartiene all'immagine dell'applicazione lineare A (e questo se e solo se i ranghi di A e A|**b** coincidono)

DEFINIZIONE: si chiama nucleo di un'applicazione lineare **f** il sottoinsieme di R^n costituito da tutti i vettori che sono trasformati dalla matrice A nel vettore **0** di R^m.

Vale il seguente teorema.

TEOREMA: Il nucleo è sempre un sottospazio di R^n e coincide con le soluzioni del sistema omogeneo associato alla matrice A che rappresenta l'applicazione lineare. La dimensione del nucleo è data da $n - r$.

ATTENZIONE: a non confondere:
- il nucleo è un sottospazio del *dominio*;
- l'immagine è un sottospazio del *codominio*.

ESEMPIO: Data la funzione lineare definita da $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$ determinare dimensione del nucleo e dell'immagine. Determinare poi il nucleo dell'applicazione. Si tratta di una funzione $f : R^3 \to R^2$ la cui matrice è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. n = 3 e il rango di A è 2, quindi la dimensione dell'immagine è 2 e quella del nucleo è 3. Per determinare il nucleo, basta risolvere il sistema omogeneo di matrice A. Si ottiene $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ e portando la z a secondo membro si ricava $y = -z$ e $x = z$. Quindi il nucleo è formato da tutti i vettori della forma $\begin{pmatrix} k \\ -k \\ k \end{pmatrix}$.

Esercizi

1. Una funzione lineare *f* è descritta dalla matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcolare l'immagine del vettore $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e calcolare le controimmagini del vettore $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Data l'applicazione lineare $\mathbf{f} : \mathrm{R}^4 \to \mathrm{R}^3$ rappresentata dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si calcoli la dimensione del nucleo di **f** e si determini al variare di *a* il numero delle controimmagini del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$.

3. Sia data un'applicazione lineare definita dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcolare la dimensione dell'immagine e dire se il vettore $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ammette controimmagini.

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e sia *k* un numero reale. Considerato il sistema $Ax = kx$, si determini per quali valori di *k* il sistema ammette soluzioni diverse dalla soluzione nulla e si risolva il sistema per $k = 6$.

Soluzioni

1. Una funzione lineare *f* è descritta dalla matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcolare l'immagine del vettore $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e calcolare le controimmagini del vettore $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. L'immagine di **x** è $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Le controimmagini di **y** sono date dalle soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. La matrice ha rango 2 e risolvendo il sistema usando il minore $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ si ricava $\begin{pmatrix} 2+2k \\ \frac{5}{2}+k \\ k \end{pmatrix}$

2. Data l'applicazione lineare $\mathbf{f} : \mathrm{R}^4 \to \mathrm{R}^3$ rappresentata dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si calcoli la dimensione del nucleo di **f** e si determini al variare di *a* il numero delle controimmagini del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$. La dimensione del nucleo di **f** è data da *n* – *r*. In questo caso *n* = 4 e il rango della matrice A è 3 (perché il minore $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è uguale a –6). Quindi la dimensione del nucleo è 1. Il numero delle controimmagini del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ è dato dalle soluzioni del sistema $Ax = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$. Il sistema è sicuramente possibile (A e A|**b** hanno lo stesso rango) e ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro, quindi la risposta è che il numero delle controimmagini è infinito.

3. Sia data un'applicazione lineare definita dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcolare la dimensione dell'immagine e dire se il vettore $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ammette controimmagini. La dimensione dell'immagine è uguale al rango di A. Il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ è diverso da zero (è uguale a 7) e quindi il rango di A è 3. Pertanto la dimensione dell'immagine è 3. Per rispondere alla seconda domanda dobbiamo cercare di risolvere il sistema $Ax = \mathbf{b}$. La matrice incompleta è A e ha rango 3. La matrice completa è $A \,|\, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Essa ha sicuramente rango almeno 3. Per vedere se ha rango 4 dobbiamo calcolare il suo determinante. Laboriosi calcoli mostrano che esso è uguale a 14. Quindi la matrice completa ha rango 4 e il sistema non è risolubile. Pertanto il vettore **b** non ha controimmagini.

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e sia k un numero reale. Considerato il sistema $Ax = kx$, si determini per quali valori di k il sistema ammette soluzioni diverse dalla soluzione nulla e si risolva il sistema per k = 6. Il sistema $A\mathbf{x} = k\mathbf{x}$ si scrive anche $(A - kI)\mathbf{x} = 0$. Si può arrivare a questo risultato anche scrivendo esplicitamente il sistema e portando tutte le incognite a sinistra del segno di uguale. Si tratta di un sistema omogeneo la cui matrice dei coefficienti è $\begin{pmatrix} 6-k & 0 & 0 \\ 0 & 2-k & 1 \\ 0 & 1 & 2-k \end{pmatrix}$.

Il determinante di questa matrice è $(6-k)\left[(2-k)^2 - 1\right] = (6-k)(k^2 - 4k + 3)$ che si annulla per k = 6, 1 e 3. Per questi tre valori il rango non è 3 ma è minore di 3 e quindi le soluzioni sono infinite. Poiché non è richiesto di determinare quante siano le soluzioni, la prima parte dell'esercizio è conclusa.

Per k = 6 la matrice diventa $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ e quindi il sistema si riduce alle due equazioni

$\begin{cases} -4y + z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases}$ che ammette l'unica soluzione $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, quindi le soluzioni del sistema sono date dai vettori $\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lezione 47

Tutta la lezione è dedicata allo studio di alcune applicazioni dell'algebra lineare all'economia.

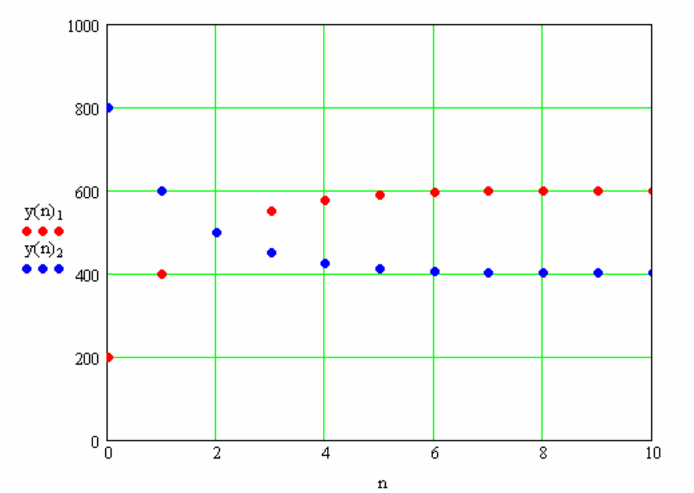
Matrici di transizione e catene di Markov

Abbiamo visto che un modo di interpretare una matrice è quello di pensarla come un'applicazione lineare, cioè una funzione che associa vettori ad altri vettori. Se dominio e codominio dell'applicazione sono lo stesso insieme (e quindi la matrice dell'applicazione è quadrata), la matrice può essere pensata come un "operatore" che "trasforma" vettori in altri vettori. Questa metafora è particolarmente suggestiva per applicare i risultati ottenuti ad alcune applicazioni.

ESEMPIO: in un sistema elettorale formato da due partiti A e B, ad ogni elezione alcuni elettori si spostano da un partito all'altro in questo modo: l'80% degli elettori di A rimane fedele ad A mentre il restante 20% passa a B. Il 70% degli elettori di B rimane fedele a B mentre il 30% passa ad A. La situazione può essere riassunta nella seguente tabella $A = \begin{pmatrix} .8 & .3 \\ .2 & .7 \end{pmatrix}$. Il numero totale di elettori è 1000. Se alla prima elezione ci sono x_A elettori di A e x_B di B, come muterà l'assetto nella seconda elezione? I nuovi elettori y_A di A saranno $y_A = .8x_A + .3x_B$ mentre i nuovi elettori di B saranno $y_B = .2x_A + .7x_B$. Questa relazione si può esprimere sinteticamente scrivendo $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Se, ad esempio, inizialmente ci fossero 200 elettori di A e 800 di B, dopo un'elezione ci sarebbero 400 elettori di A e 600 di B. Continuando così, l'evoluzione del vettore **y** sarebbe data da: $\begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 550 \\ 450 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 575 \\ 425 \end{pmatrix}$, e così via. Ad ogni passo, per trovare la nuova situazione dobbiamo moltiplicare il vettore per la matrice A.

Utilizzando il formalismo matematico, possiamo definire una successione di vettori $\mathbf{y}(n)$ con $n = 1, 2, \ldots$ in questo modo: $\mathbf{y}(0) = x_0$, $\mathbf{y}(1) = Ax_0$, $\mathbf{y}(2) = A\mathbf{y}(1) = AAx_0 = A^2x_0$ e così via. Si ha quindi $\mathbf{y}(n) = A^n x_0$. La situazione dopo l'*n*–esima elezione è data dal prodotto della matrice A elevata alla *n* per il vettore che rappresenta la situazione iniziale.

Possiamo rappresentare graficamente i due elettorati:



Come si vede, al trascorrere del tempo la situazione si "stabilizza" nel senso che i due elettorati "convergono" rispettivamente verso i valori 600 e 400.

L'esempio precedente può essere generalizzato.

DEFINIZIONE: Si chiama matrice *stocastica* una matrice in cui le colonne sono vettori di probabilità (la somma delle componenti è uguale a 1). In tal caso, il sistema che essa descrive si dice *chiuso* perché dal sistema non esce né entra alcun elemento. I modelli così costruiti si chiamano *catene discrete di Markov*.

La matrice dell'esempio è stocastica. Il sistema è chiuso perché il numero di elettori rimane costante. Il termine "catene di Markov" proviene dall'osservazione che la successione di stati del sistema può essere imaginata come una catena di stati successivi.

TEOREMA: il vettore a cui tende la successione si chiama *vettore di equilibrio* e *non* dipende dal vettore iniziale. Questa particolare proprietà (l'indipendenza dalle condizioni iniziali) si chiama *proprietà ergodica*.

La cosa si può verificare nell'esempio precedente.

Come si trova il vettore di equilibrio? La risposta è immediata osservando che esso è il vettore per cui il trasformato A**x** è uguale a **x**.

TEOREMA: il vettore di equilibrio si trova risolvendo il sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{x}$ che si può riscrivere come $(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Si tratta sempre di un sistema omogeneo e quindi sempre possibile. La soluzione nulla corrisponde alla banale osservazione che se si pone il sistema nello stato in cui tutte le variabili sono nulle non c'è evoluzione. Si cerca quindi una soluzione *diversa dalla soluzione nulla*.

ESEMPIO: nel caso precedente il sistema è $\begin{pmatrix} .8 & .3 \\ .2 & .7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ che conviene riscrivere portando tutte le incognite a sinistra del segno di uguale: $\begin{pmatrix} -0.2 & 0.3 \\ 0.2 & -0.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il rango della matrice è 1 (il determinante 2x2 è nullo). Scegliamo ad esempio il primo elemento in alto a sinistra –0.2 e scriviamo la soluzione $-0.2x=-0.3y$. Le infinite soluzioni sono quindi i vettori $\begin{pmatrix} \frac{3}{2}k \\ k \end{pmatrix}$. Ci sono quindi infiniti vettori di equilibrio? La risposta è sì, ma in alcuni casi, come nell'esempio considerato, c'è una condizioni ulteriore e cioè che gli elettori siano in tutto 1000. Deve quindi essere $\frac{3}{2}k+k=1000$ e cioè k = 400. Si ritrova così quello che avevamo visto sperimentalmente.

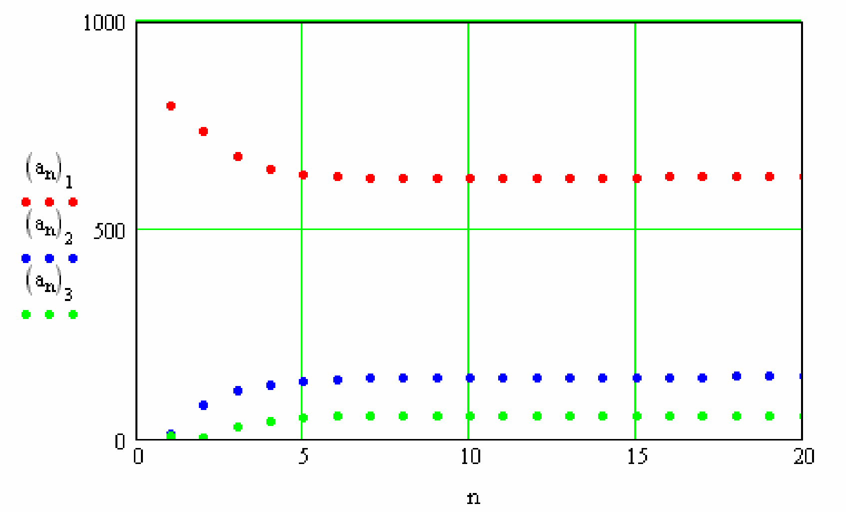
ESEMPIO: un'azienda di trasporti ha un parco macchine. Ogni automezzo può trovarsi in 3 stati diversi: circolante, in riparazione, in collaudo (dopo la riparazione). Tra i tre stati vi è settimanalmente un passaggio di automezzi (gli automezzi circolanti si rompono, veongono riparati e, dopo il collaudo, rimessi in circolazione). La matrice di transizione è $T=\begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.95 \\ 0.09 & 0.6 & 0.05 \\ 0 & 0.38 & 0 \end{pmatrix}$.

Come si nota subito, *non* si tratta di una matrice stocastica (la somma delle colonne non fa sempre 1). Il fatto che, per esempio, la prima colonna non dia somma 1 vuol dire che ogni settimana il 10%

degli automezzi circolanti si rompe. Il 9% va in riparazione e il restante 1% scompare (probabilmente è troppo danneggiato per essere riparato). Analoghe considerazioni vanno fatte per le altre colonne.

In queste condizioni il parco automezzi finirebbe rapidamente per estinguersi e non potrebbe esistere un vettore di equilibrio. È quindi necessario che settimanalmente vengano introdotti altri automezzi. Sia $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}$ il vettore che rappresenta l'ingresso dei nuovi automezzi (le componenti 2 e 3 sono nulle perché ogni veicolo che entra nel sistema è circolante).
Se il sistema parte in una certa configurazione x_0 dopo una settimana si troverà nella configurazione x_1 data da $\mathbf{x}_1 = T\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}$. Dopo un'altra settimana, la configurazione sarà $\mathbf{x}_2 = T\mathbf{x}_1 + \mathbf{b} = T(T\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}) + \mathbf{b} = T^2\mathbf{x}_0 + T\mathbf{b} + \mathbf{b}$ e così via.

Interessa sapere se ci sarà equilibrio anche in questo caso. Se c'è equilibrio, vuol dire che esiste un vettore $\mathbf{x}^*$ tale che dopo una settimana il suo trasformato coincide con se stesso, cioè $\mathbf{x}^* = T\mathbf{x}^* + \mathbf{b}$. Risolvendo questa equazione si trova l'eventuale vettore di equilibrio. Nel caso del problema proposto, il vettore di equilibrio è $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix}679.14\\160.43\\60.96\end{pmatrix}$.
L'andamento delle tre componenti del vettore è il seguente.



L'ultima cosa da osservare è che il vettore di equilibrio, come nell'esempio precedente, non dipende dallo stato iniziale del sistema ma solo dalla matrice di transizione T (che descrive l'interno del sistema) e dal vettore **b** (che descrive il modo in cui l'esterno agisce sul sistema).

Modello di Leontief

Supponiamo che un sistema economico sia articolato in 3 settori, primario, secondario e terziario. Ogni settore produce per se stesso e per gli altri settori che hanno ovviamente bisogno di altre risorse. Chiamiamo a_{ik} il fabbisogno di prodotto del settore i necessario al settore k per produrre un'unità di prodotto. Ad esempio, a_{23} è la quantità di "industria" (settore 2) che server per produrre una unità di "servizi" (settore 3). La matrice così ottenuta si chiama *matrice dei coefficienti tecnici di Leontief* o matrice dei fabbisogni.

Sia **x** = (x_1, x_2, x_3) il vettore che rappresenta le produzioni dei tre settori. I consumi interni al sistema (detti anche *consumi intermedi*), quelli cioè che servono per far funzionare il sistema stesso, sono dati da A**x**. Infatti $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$.

Di norma, la produzione di un sistema viene dettata da una certa domanda esterna al sistema.

Indichiamo la domanda con il vettore $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, detto *vettore dei consumi finali*.

Ovviamente, assegnata una certa domanda **c**, la produzione **x** *non* può coincidere con **c** perché una parte della produzione viene "assorbita" dal sistema stesso. Bisogna quindi trovare **x** in modo tale che $\mathbf{x} = \mathbf{c} + A\mathbf{x}$, cioè $\mathbf{x} - A\mathbf{x} = (I - A)\mathbf{x} = \mathbf{c}$ da cui si può ricavare **x** una volta assegnati **c** ed A.

ESEMPIO: per un sistema economico, la matrice di Leontief è $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$. Determinare:

a) il vettore dei consumi finali **c** se il vettore di produzione è $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$

b) il vettore di produzione **x** se il vettore dei consumi finali è $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Dalla relazione $\mathbf{x} - A\mathbf{x} = (I - A)\mathbf{x} = \mathbf{c}$ si ricava $\mathbf{c} = (I - A)\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.1 \\ 0 & 1 & -0.2 \\ 0 & -0.3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Viceversa, assegnato **c** si ricava **x** dal sistema $(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{c}$, cioè $\begin{cases} 0.8x - 0.1y - 0.1z = 60 \\ y - 0.2z = 80 \\ -0.3y + z = 70 \end{cases}$.

Risolvendo le ultime due equazioni rispetto a y e z, si ottiene $y = 80 + 0.2z$, $-0.3(80 + 0.2z) + z = 70$, cioè $0.94z = 94$ da cui $z = 100$ e successivamente $y = 100$ e $x = 100$.

Macchine e processi produttivi e altri esempi

Supponiamo che un'azienda produttrice di un certo bene in 3 qualità diverse (di lusso, medio economico), utilizzi 2 macchine A e B. Riassumiamo i dati noti in questa tabella:

	lusso	medio	economico
macchina A	15	10	5
macchina B	6	4	3

I numeri indicano il numero di ore di uso di una macchina per produrre una unità di prodotto.

Dette x_1, x_2 e x_3 le quantità di ogni tipo diverso che si desidera produrre, l'uso totale della macchina A sarà dato da $y_A = 15x_1 + 10x_2 + 5x_3$ mentre quello della macchina B da $y_B = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3$. Si può esprimere questo risultato in forma matriciale.

Chiamiamo $A = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 5 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice corrispondente alla tabella. Allora possiamo scrivere

$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$

Esercizi

1. La matrice di transizione $M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$ descrive gli spostamenti settimanali nelle scelte di preferenza tra 2 aziende A e B. Il vettore $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 80 \\ 50 \end{pmatrix}$ descrive gli ingressi settimanali di nuovi clienti per le due marche. Supponendo che al termine di una data settimana il vettore $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix}$ descriva la distribuzione dei clienti, calcolare la distribuzione al termine della settimana successiva; calcolare il vettore di equilibrio rispetto a M e **b**.
2. In un sistema economico con 2 settori produttivi, la matrice dei coefficienti di Leontief è $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$. Calcolare il vettore dei consumi intermedi, sapendo che il vettore di produzione è $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$. Calcolare il vettore produzione se si vuole una domanda finale uguale a $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 100 \\ 145 \end{pmatrix}$
3. La funzione che assegna gli obiettivi di politica economica $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ in funzione degli strumenti di politica economica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ è lineare e la sua matrice rappresentativa è $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Determinare in quanti modi è possibile scegliere gli strumenti **x** in modo da raggiungere gli obiettivi $\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$; determinare effettivamente tali strumenti.

Soluzioni

1. La matrice di transizione $M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$ descrive gli spostamenti settimanali nelle scelte di preferenza tra 2 aziende A e B. Il vettore $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 80 \\ 50 \end{pmatrix}$ descrive gli ingressi settimanali di nuovi clienti per le due marche. Supponendo che al termine di una data settimana il vettore $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix}$ descriva la distribuzione dei clienti, calcolare la distribuzione al termine della settimana successiva; calcolare il vettore di equilibrio rispetto a M e **b**.
   La relazione fondamentale è $\mathbf{x}^{n+1} = M\mathbf{x}^n + \mathbf{b}$, quindi $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 80 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 260 \end{pmatrix}$. Il vettore di equilibrio è la soluzione dell'equazione: $\mathbf{x} = M\mathbf{x} + \mathbf{b}$, cioè $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 80 \\ 50 \end{pmatrix}$. Riscrivendo in forma di sistema si ha $\begin{cases} x = 0.5x + 0.2y + 80 \\ y = 0.3x + 0.6y + 50 \end{cases}$, $\begin{cases} 0.5x - 0.2y = 80 \\ 0.4y - 0.3x = 50 \end{cases}$ da cui si ricava x = 300 e y = 350
2. In un sistema economico con 2 settori produttivi, la matrice dei coefficienti di Leontief è $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$. Calcolare il vettore dei consumi intermedi, sapendo che il vettore di produzione è $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$. Calcolare il vettore produzione se si vuole una domanda finale uguale a $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 100 \\ 145 \end{pmatrix}$.
   La relazione fondamentale è $\mathbf{x} = \mathbf{d} + A\mathbf{x}$. Il vettore dei consumi intermedi è $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \end{pmatrix}$**.** Risolvendo la relazione precedente rispetto ad **x**, si ha $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 145 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, cioè $\begin{cases} x = 100 + 0.2x + 0.1y \\ y = 145 + 0.1x + 0.2y \end{cases}$ da cui la soluzione x = 150 e y = 200
3. La funzione che assegna gli obiettivi di politica economica $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ in funzione degli strumenti di politica economica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ è lineare e la sua matrice rappresentativa è $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Determinare in quanti modi è possibile scegliere gli strumenti **x** in modo da raggiungere gli obiettivi $\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$; determinare effettivamente tali strumenti.

Bisogna risolvere il sistema $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$, cioè $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 100 \\ 5x_1 + 4x_3 = 100 \end{cases}$. Si tratta di un sistema con tre incognite (n = 3) in cui la matrice A ha rango uguale a 2 (il minore $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ è diverso da zero). Il sistema ha infinite soluzioni. Per trovare le soluzioni, basta risolvere il sistema rispetto a x_1 e x_2.

$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 100 \\ 5x_1 = 100 - 4x_3 \end{cases}$ da cui $x_1 = \dfrac{100 - 4x_3}{5}$, $x_2 = \dfrac{100 - 3x_1}{7} = \dfrac{100 - 3\dfrac{100 - 4x_3}{5}}{7} = \dfrac{200 + 12x_3}{35}$

Prof. Fabrizio Iozzi – email: fabrizio.iozzi@uni-bocconi.it

Lezione 48-49

Simbolo di sommatoria

NOTAZIONE: la somma di più elementi distinti solo da un indice si indica anche con il simbolo di sommatoria $\sum$ (lettera greca sigma maiuscola). La notazione corretta è $\sum_{i=1}^{n} x_i$ che si legge "somma per i che va da 1 a n di x con i". Si tratta di una scrittura sintetica per indicare una somma estesa a più indici. In basso è scritto chi è l'indice e da dove parte, in alto dove arriva (implicitamente, il passo è uguale a 1) e a destra si scrive che cosa va sommato.

Quindi, per esempio, $\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{x}_i = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k$

Ecco altri esempi:

- $\sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5 = 15$
- $\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1+4+9+16 = 30$
- $\sum_{s=1}^{6} \frac{1}{s} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{147}{60}$
- $\sum_{i=1}^{5} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$

La lettera che denota l'indice della sommatoria non è essenziale. Importano, invece, i valori di inizio e di fine. La scrittura di una somma con il simbolo di sommatoria non è unica. Per esempio, $\sum_{i=0}^{3}(i+1) = 1+2+3+4$ e $\sum_{i=1}^{4} i = 1+2+3+4$ hanno lo stesso significato (cambiano i valori dell'indice e cambia anche la quantità sommata, ma il valore è lo stesso).

Per le sommatorie valgono le proprietà delle somme e in particolare quella "di raccoglimento". Se abbiamo una somma $ab + ac$ possiamo scriverla come $a(b+c)$. Analogamente si può semplificare la somma $\sum_{i=1}^{n} ac_i = a\sum_{i=1}^{n} c_i$ (in altre parole, le quantità costanti rispetto all'indice si possono "portare fuori" dal segno di sommatoria).

Somma dei termini di una successione geometrica

Si incontra frequentemente nelle applicazioni il problema di dover calcolare la somma di un certo numero di termini di una successione geometrica. Ricordiamo che una successione geometrica è definita dalla relazione $a_n = aq^n$ per n = 0, 1, …

Vogliamo dunque calcolare $S=\sum_{i=0}^{n} aq^i$. Osserviamo innanzi tutto che possiamo raccogliere il fattore comune a e che quindi $S=a\sum_{i=0}^{n} q^i$. Il problema è diventato quello del calcolo di $\sum_{i=0}^{n} q^i$. Tale problema si risolve facilmente osservando che $1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Quindi $S=a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

TEOREMA: la somma dei primi n termini di una successione geometrica aq^i è uguale a $\sum_{i=0}^{n} aq^i = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Rendite

DEFINIZIONE: si dice rendita una successione di capitali che si rendono disponibili nel tempo. La rendita si dice:

- anticipata o posticipata
  - anticipata se i capitali si rendono disponibili all'inizio del periodo (per es. pagamenti al primo di ogni mese, anno, ecc.)
  - posticipata se i capitali si rendono disponibili alla fine del periodo (per es. pagamenti al 31 di ogni mese, ecc.)
- a rata
  - costante se i capitali sono tutti uguali
  - variabile se i capitali sono diversi fra loro
- temporanea o perpetua
  - temporanea se la successione di capitali ha un inizio e una fine certa
  - perpetua se la successione di capitali è infinita
- immediata o differita
  - immediata se la successione di capitali inizia adesso (per es. pago a rate e inizio a pagare subito)
  - differita se la successione di capitali inizia dopo un certo tempo (per es. compro oggi e inizio a pagare le rate tra 6 mesi)
- periodica se i capitali si rendono disponibili ad intervalli di tempo regolari (e la rendita si dice allora annua, mensile, biennale, ecc.)

DEFINIZIONE: il *montante* di una rendita è la somma che è disponibile alla *fine* della rendita, una volta trasferiti tutti i capitali all'istante finale.

DEFINIZIONE: il *valore attuale* di una rendita è la somma che è disponibile all'*inizio* della rendita, una volta trasferiti tutti i capitali all'istante iniziale.

OSSERVAZIONE: la determinazione del montante o del valore attuale di una rendita segue le regole del calcolo finanziario. Quindi sono possibili più valori per queste quantità al variare della legge di capitalizzazione composta. I termini "montante" e "valore attuale" valgono per tutti i regimi.

ESEMPIO: una rendita è costituita da 3 rate di 100€, 200€ e 150€ disponibili rispettivamente tra 1, e e 3 anni. Calcolare il valore attuale e il montante di tale rendita in capitalizzazione composta.
Si tratta di una rendita annua, a rata non costante, immediata, posticipata. Il valore attuale è la somma dei valori attuali delle 3 somme: in capitalizzazione composta esso equivale a:

$\frac{100}{(1+i)}+\frac{200}{(1+i)^2}+\frac{300}{(1+i)^3}$. Fissato i si può calcolare la somma (ad es. per i = 6% il valore attuale è 524.225€). Il montante si riferisce al momento finale che essendo la rendita posticipata coincide con l'ultimo pagamento. Quindi esso è uguale a $100(1+i)^2+200(1+i)^1+300=624.36$

ATTENZIONE: nel seguito intenderemo sempre applicata la capitalizzazione composta.

Il calcolo della somma di una successione geometrica è utile nella determinazione del valore attuale e del montante di una rendita. Consideriamo prima un caso particolare.

TEOREMA: il valore attuale di una rendita:
- di n rate periodiche
- tutte uguali a 1 unità di capitale
- immediata
- posticipata
- valutata al tasso *i*% (relativo al periodo considerato)

si indica con il simbolo $a_{\overline{n}|i}$ che si legge "a figurato n al tasso i" ed è uguale a $a_{\overline{n}|i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. Se la rata ha valore costante uguale a R, il suo valore attuale nelle medesime condizioni è

$$Ra_{\overline{n}|i}=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

OSSERVAZIONE: tale relazione si ricava dopo alcuni passaggi dalla relazione $a_{\overline{n}|i}=\frac{1}{(1+i)}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}+\dots\frac{1}{(1+i)^n}$. Infatti, essendo la rendita posticipata, il valore della prima rata va attualizzato ad oggi e quindi "portato indietro di un anno". Analogamente per le altre rate.

TEOREMA: il montante di una rendita:
- di n rate periodiche
- tutte uguali a 1 unità di capitale
- immediata
- posticipata
- valutata al tasso *i*% (relativo al periodo considerato)

si indica con il simbolo $s_{\overline{n}|i}$ che si legge "s figurato n al tasso i" ed è uguale a $s_{\overline{n}|i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$. Se la rata ha valore costante uguale a R, il montante nelle medesime condizioni, è uguale a

$$Rs_{\overline{n}|i}=R\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

OSSERVAZIONE: tale relazione si ricava dopo alcuni passaggi dalla relazione $s_{\overline{n}|i}=1+(1+i)+(1+i)^2+\dots(1+i)^{n-1}$. Infatti, essendo la rendita posticipata, il valore dell'ultima rata è esattamente 1 (la rendita va valutata al momento dell'ultimo pagamento). La rata precedente va capitalizzata per un periodo, quella ancora precedente per 2 periodi e così via fino alla prima che va capitalizzata per n – 1 periodi (si ricordi che la rendita è posticipata e quindi la prima rata è disponibile alla fine del primo periodo).

ESEMPIO: sia data una rendita annua con 5 rate uguali a 150€, immediata, posticipata. Valutare al 6% il suo montante e il suo valore attuale.

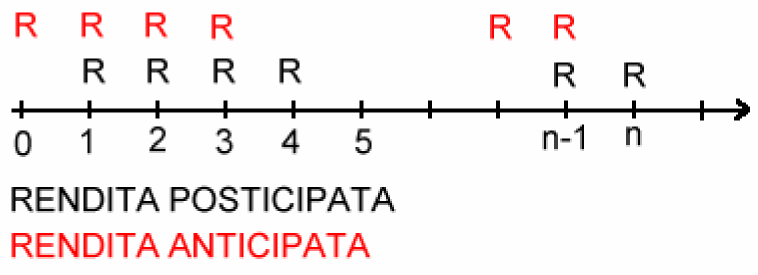
Il montante è uguale a $150\frac{(1+0.06)^5-1}{0.06}=845.56$€.

Il valore attuale è $150\frac{1-(1+0.06)^{-5}}{0.05}=631.85$€

OSSERVAZIONE: nelle applicazioni, può essere necessario calcolare montante e valore attuale di rendite anticipate. I simboli corrispondenti sono $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ e $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ che si leggono "s anticipato …" e "a anticipato …". Ci sono formule esplicite che danno i risultati ma non conviene impararle. Basta invece osservare che

- il v.a. di una rendita anticipata è uguale al v.a. di una rendita posticipata che ha lo stesso numero di rate capitalizzato ulteriormente per 1 periodo. In formule: $\ddot{a}_{\overline{n}|i}=(1+i)a_{\overline{n}|i}$
- il montante di una rendita anticipata è uguale al montante di una rendita posticipata che ha lo stesso numero di rate, capitalizzato ulteriormente per 1 periodo. In formule: $\ddot{s}_{\overline{n}|i}=(1+i)s_{\overline{n}|i}$

Può essere utile confrontare lo schema seguente.



OSSERVAZIONE: per le rendite differite il discorso è analogo. Il valore attuale e il montante vanno portati avanti (o indietro) in modo da poter utilizzare i risultati noti.

Per le rendite perpetue valgono analoghe formule.

TEOREMA: il valore attuale di una rendita perpetua immediata posticipata di rata unitaria valutata al tasso *i*% si indica con $a_{\overline{\infty}|i}$ ed è uguale a $a_{\overline{\infty}|i}=\frac{1}{i}$. Se la rata è R il valore attuale è $Ra_{\overline{\infty}|i}=\frac{R}{i}$.
Analogamente, il v.a. di una rendita perpetua immediata anticipata di rata unitaria valutata al tasso *i*% si indica con $\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}$ ed è uguale a $\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}=\frac{1+i}{i}$. Se la rata è R il valore attuale è $R\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}=R+\frac{R}{i}$.

OSSERVAZIONE: nel calcolo delle rendite va sempre tenuto conto che il tasso di interesse e la periodicità devono essere corrispondenti. Se non lo sono, il tasso va convertito nel tasso equivalente al periodo.

ESEMPIO: calcolare il montante di una rendita semestrale di 200€ che dura 3 anni al tasso del 5% annuo. Poiché la rendita è semestrale, bisogna convertire il tasso del 5%: il tasso semestrale corrispondente si trova risolvendo l'equazione $1+i=(1+i_2)^2$, cioè $1.05=(1+i_2)^2$ da cui $i_2=\sqrt{1.05}-1=0.0246=2.46\%$. Il montante è quindi quello di una rendita che ha 6 rate (ci sono 6 semestri in 3 anni) al tasso del 2.46%: $200\frac{(1.0246)^6-1}{0.0246}=1281.50$€

OSSERVAZIONE: le formule del valore attuale e del montante coinvolgono altre tre quantità: la rata R, il tasso *i* e il numero di rate *n*. Il calcolo di R e *n* non presenta particolari problemi mentre quello di *i* richiede in generale la risoluzione di un'equazione di grado *n* che può essere portata a termine solo con il calcolatore.

DCF, VAN e TIR

Questo paragrafo è dedicato a tre oggetti di uso frequente in matematica finanziaria.

DEFINIZIONE: si dice *flusso di cassa* l'insieme dei movimenti di cassa a_0, a_1, …, presi con il loro segno (positivo se entrate, negativo se uscite) e con le loro scadenze t_0, t_1, … Di norma si sceglie come $t = 0$ la prima scadenza.

DEFINIZIONE: si chiama *discounted cash flow (DCF)* di un'operazione finanziaria la somma algebrica dei valori scontati (attualizzati) (calcolati in $t = 0$ con sconto composto) dei suoi movimenti di cassa.

OSSERVAZIONE: poiché per attualizzare occorre un tasso di interesse e la definizione di DCF non lo menziona, il DCF è una quantità che dipende da una variabile, il tasso di interesse, di solito indicato con *x*.

ESEMPIO: sia dato il seguente flusso di cassa:

tempi	movimenti
0	–100€
1	50€
3	100€

che potrebbe corrispondere ad un investimento di 100€ fatto adesso per ricevere 50€ tra un anno e 100€ tra 3 anni. Il suo DCF è $DCF(x) = -100 + \frac{50}{1+x} + \frac{100}{(1+x)^3}$

OSSERVAZIONE: il DCF è una funzione di *x* che viene usato frequentemente in analisi finanziaria. In particolare, il DCF calcolato per un certo valore *i*, rappresenta il valore dell'intera operazione finanziaria per un soggetto che impieghi usualmente il proprio denaro al tasso *i*.

ESEMPIO: calcoliamo, per l'operazione precedente, DCF(1%) = $-100 + \frac{50}{1.01} + \frac{100}{1.01^3} = 46.56$.

Quindi per un soggetto che impiega usualmente il suo denaro all'1%, l'operazione descritta sopra "vale" 46.56€

DEFINIZIONE: il DCF calcolato per un dato tasso *i* si chiama *valore attuale netto* (VAN)

DEFINIZIONE: una soluzione (maggiore di –1) dell'equazione DCF(*x*) = 0 si chiama *tasso interno* (TIR) dell'operazione finanziaria (di rendimento se si tratta di un investimento, di costo se si tratta di un finanziamento).

ESEMPIO: sia dato il seguente flusso di cassa:

tempi	movimenti
0	–100€
1	60€
2	60€

Allora il suo DCF è $DCF(x) = -100 + \frac{60}{1+x} + \frac{60}{(1+x)^2}$. Troviamo le soluzioni dell'equazione DCF(x) = 0. $-100 + \frac{60}{1+x} + \frac{60}{(1+x)^2} = 0$. Moltiplicando per $(1+x)^2$ si ottiene $-100(1+x)^2 + 60(1+x) + 60 = -100 - 200x - 100x^2 + 60 + 60x + 60 = -100x^2 - 140x + 20 = 0$ che risolta dà $x = -1.53\ldots$ e $x \approx 0.1306$. Solo la prima soluzione è accettabile e quindi il TIR dell'operazione è circa il 13.06%

OSSERVAZIONE: la soluzione dell'equazione DCF(x) = 0 non necessariamente è unica (se si considerano operazioni complesse si possono avere più soluzioni tutte accettabili).

Esercizi

1. Calcolare il valore attuale e il montante di una rendita annua di 6 rate di 120€, immediata, posticipata al tasso del 6%.
2. Calcolare le stesse quantità dell'esercizio precedente per una rendita di 12 semestri con rata di 60€ al tasso 3%
3. Dato il seguente flusso di cassa

tempi	movimenti
0	–200
1	110
2	100

   calcolarne il DCF, il VAN al tasso del 7% e il TIR
4. Il DCF di un'operazione finanziaria che alle scadenze 0, 1 e 2 comporta i movimenti di cassa –20, 60 e –30 è $G(x) = -20 + \frac{60}{1+x} - \frac{30}{(1+x)^2}$ con $x > -1$. Trovare il tasso x^* che massimizza $G(x)$ e tracciare il grafico di G evidenziando l'esistenza di eventuali tassi interni.
5. Il vettore $\begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$ descrive un'operazione finanziaria con movimenti a scadenza 0, 1 e 2 anni. Calcolare il TIR di tale operazione. Calcolare al tasso composto annuo i = 4%, il montante M di tale operazione alla scadenza t = 3 anni.

Soluzioni

1. Calcolare il valore attuale e il montante di una rendita annua di 6 rate di 120€, immediata, posticipata al tasso del 6%.

   Il v.a. è $120\frac{1-(1+0.06)^{6}}{0.06}=590.07$, il montante è $120\frac{(1+0.06)^{6}-1}{0.06}=837.03$

2. Calcolare le stesse quantità dell'esercizio precedente per una rendita di 12 semestri con rata di 60€ al tasso 3%

   Il v.a. è $60\frac{1-(1.03)^{-12}}{0.03}=597.24$, il montante è $60\frac{(1.03)^{12}-1}{0.03}=851.52$

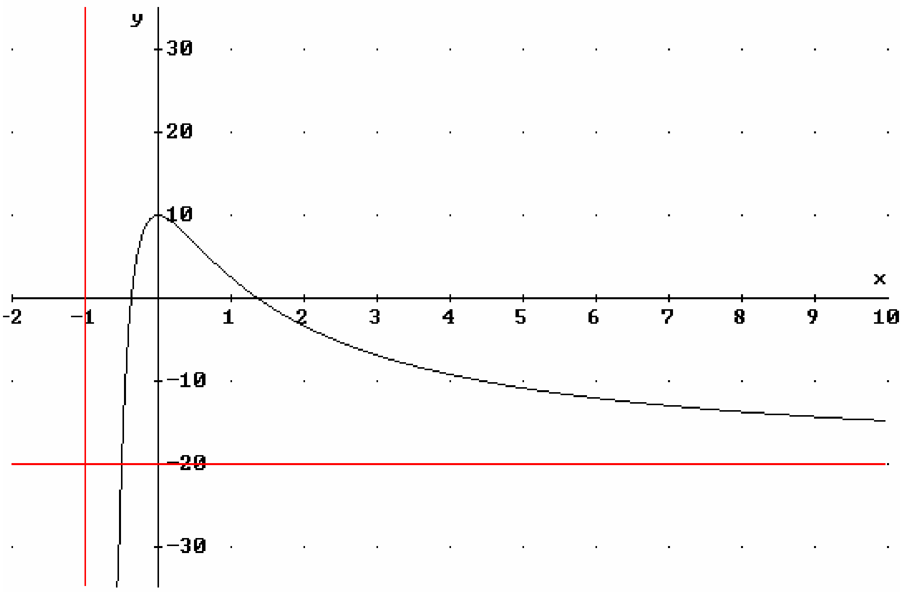
3. Dato il seguente flusso di cassa

tempi	movimenti
0	–200
1	110
2	100

   calcolarne il DCF, il VAN al tasso del 7% e il TIR.

   $DCF(x)=-200+\frac{110}{1+x}+\frac{100}{(1+x)^2}$, $VAN=DCF(0.07)=-200+\frac{110}{1.07}+\frac{100}{1.07^2}=-9.85$; il TIR si trova risolvendo l'equazione DCF(x) = 0. $-200(1+x)^2+110(1+x)+100=0$, cioè $-200x^2-290x+10=0$ da cui l'unica soluzione accettabile è –0.0336, cioè circa il 3.36%.

4. Il DCF di un'operazione finanziaria che alle scadenze 0, 1 e 2 comporta i movimenti di cassa –20, 60 e –30 è $G(x)=-20+\frac{60}{1+x}-\frac{30}{(1+x)^2}$ con $x > -1$. Trovare il tasso x^* che massimizza $G(x)$ e tracciare il grafico di G evidenziando l'esistenza di eventuali tassi interni. Per massimizzare G calcoliamo prima la derivata $\frac{dG}{dx}=-\frac{60}{(1+x)^2}+\frac{60}{(1+x)^3}=-\frac{60x}{(1+x)^3}$. G' si annulla solo per $x = 0$ che quindi è l'unico punto estremo. Poiché per $x < 0$ G' è positiva e per $x > 0$ è negativa, $x = 0$ è un punto di massimo. Per tracciare il grafico di G(x) osserviamo che $\lim_{x\to -1^+} G(x)=-\infty$ e che $\lim_{x\to +\infty} G(x)=-20$. Il grafico di G($x$) è quindi il seguente:

   da cui si vede che l'operazione finanziaria ha due tassi interni.

5. Il vettore $\begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$ descrive un'operazione finanziaria con movimenti a scadenza 0, 1 e 2 anni. Calcolare il TIR di tale operazione. Calcolare al tasso composto annuo i = 4%, il montante M di tale operazione alla scadenza t = 3 anni. Il DCF dell'operazione è $-80+\frac{100}{(1+x)^2}$ e il TIR è la soluzione positiva dell'equazione $-80+\frac{100}{(1+x)^2}=0$, cioè $(1+x)^2=\frac{5}{4}$ da cui $x=-1\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. L'unica soluzione positiva è $x=\frac{\sqrt{5}-2}{2}\approx 0.118$ corrispondente a un tasso dell'11.8%. Il montante di tale operazione alla scadenza assegnata si ottiene capitalizzando i movimenti di cassa per 3 anni: $M=-80\cdot 1.04^3+100\cdot 1.04=14.01$.

Lezione 50-51

Serie numeriche

Il concetto di serie estende quello delle somme finite al finito.

DEFINIZIONE: data una successione a_n si chiama *successione delle somme parziali* (o *successione delle ridotte*) la successione s_n definita da $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$.

OSSERVAZIONE: quando la successione a_n non è definita per alcuni valori per convenzione la successione delle somme parziale parte dal primo valore utile.

ESEMPIO: data la successione $a_n = n$ la successione delle ridotte è data da
$s_0 = a_0 = 0$
$s_1 = a_0 + a_1 = 0 + 1 = 1$
$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 0 + 1 + 2 = 3$
$s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$
$s_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
…
e così via. La successione è quindi $s_n = \{0,1,3,6,10,\dots\}$

ESEMPIO: data la successione $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ la successione delle ridotte (che parte da 2) è data da

$s_2 = a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = -\frac{1}{2}$

$s_3 = a_2 + a_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

$s_4 = a_2 + a_3 + a_4 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$

…

e così via. La successione è quindi $s_n = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \dots\right\}$

DEFINIZIONE: in alcune successioni, come nella precedente, i termini di un addendo si semplificano con quelli dell'addendo seguente. Queste serie si dicono *telescopiche*.

DEFINIZIONE: data una successione a_n si dice che *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (diverge) se la successione delle sue somme parziali converge (diverge). a_n si dice *termine generale* della serie. Se il limite della successione delle somme parziali non ha limite, si dice che la serie è *irregolare*. Quando la serie converge il limite delle somme parziali si dice "somma della serie".

OSSERVAZIONE: la proprietà di convergere o meno di una serie si dice "carattere" della serie. Pertanto, studiare il carattere di una serie vuol dire stabilire se essa è convergente, divergente o irregolare.

Vediamo ora alcune proprietà:

- come per qualsiasi sommatoria, l'indice che compare nella serie è ininfluente ai fini del calcolo.
- per le serie vale la proprietà di raccoglimento a fattore comune di un termine moltiplicativo *costante*, cioè non dipendente dall'indice di somme, ad esempio la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n+1}$ è uguale alla serie $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$
- il primo termine da cui inizia la serie è importante ai fini del calcolo della somma della serie: ogni termine della successione delle somme parziali, infatti, contiene tutti i termini precedenti.
- il carattere di una serie *non* dipende dal numero di termini di una serie né dal punto iniziale. Sono gli infiniti termini (e la loro natura) che determinano se una serie è convergente, divergente o irregolare. Quando si vuole stabilire il carattere di una serie, quindi, occorre analizzare le proprietà assunte *definitivamente* dal termine generale a_n.

ESEMPIO: con riferimento agli esempi iniziali, si nota che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n$ diverge, mentre la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)$ converge e ha per somma -1.

ESEMPIO: vogliamo stabilire il carattere della serie $\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)$. Con una procedura analoga a quella esposta poco sopra scopriamo che la somma parziale n-esima è uguale a $\frac{1}{n}-\frac{1}{3}$ e al tendere di n all'infinito tende a $-1/3$. La serie quindi converge e ha per somma $-1/3$. Come si vede il cambiamento del "punto iniziale" non ha mutato il carattere della serie (che continua a convergere) ma ha cambiato la sua somma (che non è più -1 ma $-1/3$).

In generale, il problema della convergenza di una serie (cioè della convergenza della successione delle somme parziali) è più complesso di quello della convergenza di una successione, per la difficoltà di scrivere esplicitamente la successione s_n. In qualche caso, però, si può scrivere esplicitamente la somma parziale e allora il problema della convergenza di una serie si riduce al calcolo di un limite di una successione.

ESEMPIO (serie di Mengoli): la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ è detta serie "di Mengoli". Costruiamo la successione delle somme parziali:

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 + a_3 = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}$$

…

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Si tratta di una serie telescopica in cui la successione delle somme parziali ha un'espressione esplicita molto semplice: $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Quando n tende all'infinito, la successione s_n tende a 1, quindi possiamo dire che la serie di Mengoli $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ converge ed ha per somma 1.

Serie geometrica

DEFINIZIONE: si chiama *serie geometrica* la serie il cui termine generale è il termine generale di una successione geometrica. Una serie geometrica ha quindi la forma $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$. Poiché il fattore a è costante, possiamo limitarci a studiare il comportamento della serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

TEOREMA: la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$:

- per $-1 < q < 1$ converge e la sua somma vale $\frac{1}{1-q}$.
- per $q \geq 1$ diverge
- per $q \leq -1$ è irregolare

DIMOSTRAZIONE: grazie alla formula ricavata per la somma dei termini di una successione geometrica, possiamo calcolare la somma parziale n-esima della serie geometrica: $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
Facciamo ora tendere n all'infinito. L'unico termine che dipende da n è q^{n+1}. Distinguiamo vari casi:

- se $-1 < q < 1$ allora $q^{n+1} \to 0$ e quindi la serie converge al valore $\frac{1}{1-q}$
- se $q = 1$ *non* si può applicare la formula della somma parziale (che risulta 0/0). In questo caso, la serie si riduce a 1 + 1 + 1 + … e le sue somme parziali sono 1, 2, 3, …, n e ovviamente tendono all'infinito. La serie quindi diverge
- se $q > 1$ la formula è valida ma il termine $q^{n+1} \to \infty$ e quindi la serie diverge
- se $q = -1$ la serie si riduce a 1 – 1 + 1 – 1 + … e le sue somme parziali sono 1, 0, 1, 0, … La successione delle somme parziali è quindi irregolare e la serie è dunque irregolare
- se $q < -1$ il termine generale della serie non ha segno costante (anche se diverge in valore assoluto). La successione delle somme parziali è divergente all'infinito (senza segno) e quindi la serie è irregolare.

OSSERVAZIONE: se la serie proposta è $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ la somma è $\frac{a}{1-q}$.

ESEMPI: determinare il carattere delle seguenti serie

- $\sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot 3^n$. Si tratta di una serie geometrica. In questo caso a = 2 e q = 3. La serie è divergente (la ragione q è maggiore di 1)
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$. Si può riscrivere il termine generale come $2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Anche questa è una serie geometrica. Si ha a = 2 e q = $\frac{1}{3}$ e quindi la serie converge. La sua somma è $2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$
- $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot 4^{-n}$. Si può riscrivere il termine generale così: $5 \cdot \frac{1}{4^n} = 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Si tratta di una serie geometrica di ragione 1/4 la cui somma è $5 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{20}{3}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot 3^{-n}$. Si tratta di una serie geometrica di ragione 1/3 ma bisogna fare attenzione che la somma inizia da 1 e non da 0. Possiamo calcolare la somma della serie geometrica e poi togliere il primo termine che è $4 \cdot 3^0 = 4$. Calcoliamo cioè $\sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot 3^{-n} = 4 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ e la somma della serie proposta è 6 – 4 = 2

La formula di Gordon

Un'applicazione delle serie in ambito finanziario è la formula di Gordon. Secondo questa formula, il valore di un'azione è dato dalla somma dei valori attualizzati (scontati) dei dividendi futuri che essa pagherà. Chiamiamo con d_1 il primo dividendo e supponiamo che i successivi dividendi siano ottenuti moltiplicando il dividendo precedente per un fattore $(1+g)$. Pertanto, $d_2 = d_1(1+g)$, $d_3 = d_2(1+g) = d_1(1+g)^2$ e in generale $d_n = d_1(1+g)^{n-1}$.

Per attualizzare i dividendi, fissiamo un tasso composto r, per cui il valore attuale del primo dividendo sarà $\frac{d_1}{(1+r)}$, quello del secondo $\frac{d_2}{(1+r)^2} = \frac{d_1(1+g)}{(1+r)^2}$ e in generale $\frac{d_1(1+g)^{n-1}}{(1+r)^n}$. Per rendere uguale l'esponente al numeratore e al denominatore della frazione riscriviamo l'ultima espressione in questo modo $\frac{d_1}{1+r} \cdot \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{n-1}$.

Se l'azione viene posseduta per un tempo lungo (infinito) il suo valore è dato dalla somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_1}{1+r} \cdot \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{n-1}$. Poiché il fattore $\frac{d_1}{1+r}$ non dipende da n possiamo portarlo fuori dal segno di sommatoria e possiamo anche cambiare l'indice da n a k in modo che la somma inizi da 0. Dopo queste trasformazioni il valore dell'azione diventa $\frac{d_1}{1+r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^k$. Nell'ipotesi $0 < g < r$ il termine in parentesi è minore di 1 e quindi la formula è quella di una serie convergente di ragione $\frac{1+g}{1+r}$. La somma della serie è $\frac{1}{1-\frac{1+g}{1+r}} = \frac{1+r}{r-g}$ e il valore finale dell'azione è $\frac{d_1}{1+r} \cdot \frac{1+r}{r-g} = \frac{d_1}{r-g}$.

ESEMPIO: un'azione ha un dividendo di 100 € con prospettiva di aumento dell'1% annuo (g = 0.01) valutata al tasso del'5% (r = 0.05) annuo ha un valore di $\frac{100}{0.05-0.01}=\frac{100}{0.04}=2500$

Esercizi

1. La somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ è:
   a) 5/3
   b) 2/5
   c) 2/3
   d) $+\infty$
2. Dire per quali valori del parametro reale a la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+a}{1-a}\right)^n$ converge e calcolarne la somma
3. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge. È vero che necessariamente $a_n \to S$ dove S è la somma della serie?
4. Calcolare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ e se convergente calcolarne la somma

Soluzioni

1. La somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ è:

   a) 5/3
   b) 2/5
   c) 2/3 GIUSTA
   d) +∞

   La risposta giusta è la c) perché la serie inizia da 1 (e non da 0). La somma della serie geometrica (che inizia da 0) è 5/3, il primo elemento è 1 e quindi la somma della serie assegnata è 5/3 – 1 = 2/3

2. Dire per quali valori del parametro reale *a* la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+a}{1-a}\right)^n$ converge e calcolarne la somma.

   La serie assegnata è una serie geometrica di ragione $\frac{2+a}{1-a}$. La serie geometrica converge quando la ragione è compresa tra –1 e 1. Quindi la serie proposta converge quando $-1<\frac{2+a}{1-a}<1$ che equivale al sistema di disequazioni $\begin{cases}-1<\frac{2+a}{1-a}\\ \frac{2+a}{1-a}<1\end{cases}$. La risoluzione di questo sistema è un po' laboriosa. La prima disequazione diventa $\frac{3}{1-a}>0$ che implica $a < 1$. La seconda diventa $\frac{1+2a}{1-a}<0$ che è risolta per $a<-\frac{1}{2}$ e $a > 1$. Il sistema proposto diventa quindi $\begin{cases}a<1\\ a<-\frac{1}{2} \text{ e } a>1\end{cases}$ la cui soluzione è $a<-\frac{1}{2}$. La somma della serie è $\frac{1}{1-\frac{2+a}{1-a}}=\frac{1-a}{-1-2a}=\frac{a+1}{2a+1}$

3. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge. È vero che necessariamente $a_n \to S$ dove *S* è la somma della serie?

   No. Dire che la serie converge vuol dire che la successione delle somme parziali s_n converge a *S*. Il termine generale a_n anzi non può tendere a *S*, perché se così fosse, la successione delle somme parziali si incrementerebbe ogni volta di un addendo molto vicino a *S* e quindi la sua somma divergerebbe (perché fatta di infiniti termini)

4. Calcolare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ e se convergente calcolarne la somma. Occorre riscrivere il termine generale in una forma diversa, ricordando che $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$. Allora $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$. Allora la serie proposta è $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(n+1)-\ln n$. Scrivendo i primi termini si vede che si tratta di una serie telescopica: $(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3)+\dots$
   Nella somma parziale *n*-esima tutti gli addendi si elidono ad eccezione di –ln1 e di ln (*n*+1). Quindi $s_n=-\ln 1+\ln(n+1)\to+\infty$ e la serie diverge.

Lezione 52

Condizione necessaria per la convergenza

Dire che una serie converge equivale a dire che la successione delle somme parziali converge. La successione delle somme parziali è fatta in questo modo:

$s_0 = a_0$

$s_1 = a_0 + a_1$

$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$

e così via. Supponiamo che la serie converga. Allora la successione delle somme parziali converge. Ma in questa successione ogni termine è dato dalla somma del termine precedente con l'elemento a_n. Sembra abbastanza intuitivo che il termine che si somma debba essere abbastanza piccolo in modo da garantire la convergenza (se tale termine fosse grande la somma "scoppierebbe" divergendo verso l'infinito). Questa idea è formalizzata nel seguente teorema

TEOREMA: se una serie è convergente allora il suo termine generale tende a 0.

DIMOSTRAZIONE: prendiamo due termini successivi della successione s_n: s_n e s_{n+1}. La loro differenza $s_{n+1} - s_n$ è uguale all'ultimo termine a_{n+1}, cioè $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$. Se ora facciamo tendere n all'infinito e se la serie converge ad una somma S, si ha $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = S - S = 0$.

In una serie convergente il termine generale *deve* tendere a zero. Tale condizione è però solo necessaria.

ATTENZIONE: la condizione è solo necessaria e non sufficiente. In altre parole, se in una serie il termine generale tende a zero la serie può convergere ma può anche non convergere. Viceversa, una serie il cui termine generale non tenda a zero necessariamente non converge.

Serie a termini positivi. La serie armonica e la serie armonica generalizzata

Lo studio delle serie si semplifica notevolmente se si considerano solo serie a termini positivi. Una prima conseguenza è che tali serie non possono essere irregolari (perché la successione delle somme parziali è necessariamente crescente).

TEOREMA: ogni serie a termini positivi è regolare, cioè converge o diverge a $+\infty$.

Per queste serie vale anche un particolare criterio, detto criterio del confronto, analogo a quello studiato per le successioni.

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO): date due serie a termini positivi $\sum a_n$ e $\sum b_n$ tali che, almeno definitivamente, $a_n < b_n$, allora:

- se la serie $\sum a_n$ diverge allora anche la serie $\sum b_n$ diverge
- se la serie $\sum b_n$ converge allora anche la serie $\sum a_n$ converge

Il teorema risulta intuitivo se si pensa alle serie come a "somme infinite": se la prima serie diverge e ogni suo termine è minore di quello corrispondente della seconda serie, necessariamente anche la seconda deve divergere. Analogamente per l'altra affermazione.

Una serie di particolare interesse è la serie armonica.

DEFINIZIONE: si chiama serie armonica la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Si chiamano serie armoniche generalizzate le serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$.

La serie armonica è un caso particolare delle serie armoniche generalizzate, quello per $a = 1$. Vale il seguente importante teorema:

TEOREMA: la serie armonica generalizzata:
- converge se $a > 1$
- diverge se $a \leq 1$

Quindi la serie armonica $\sum\frac{1}{n}$ diverge mentre, per esempio, la serie $\sum\frac{1}{n^2}$ converge.

ATTENZIONE: il precedente teorema non dice nulla sulla somma della serie quando essa converge ma si limita a stabilirne il carattere. In generale, il problema del calcolo della somma della serie è difficile, molto più difficile della determinazione del suo carattere.

OSSERVAZIONE: il precedente teorema, inoltre, fornisce un controesempio alla condizione necessaria per la convergenza. La serie armoniche, infatti, hanno tutte la proprietà di avere il termine generale tendente a zero. Tuttavia, alcune di esse convergono mentre altre non convergono.

L'importanza della serie armonica generalizzata si comprende alla luce del seguente teorema

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO): se due serie a termini positivi $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno i termini generali asintotici, cioè $a_n \sim b_n$, allora esse hanno lo stesso carattere (cioè se una diverge anche l'altra diverge e se una converge anche l'altra converge)

Il criterio del confronto asintotico permette in alcuni casi di stabilire rapidamente il carattere di una serie, se si riesce a stabilire un'altra serie a cui essa è asintotica. Di solito, le serie si confrontano con un'opportuna serie armonica generalizzata. Stabilito l'ordine di grandezza, il risultato della convergenza è immediato.

ESEMPIO: si vuole studiare il carattere della serie $\sum\frac{n+3}{n^3+n^2+4}$. È difficile trovare un'espressione per la successione delle somme parziali di questa serie, ma possiamo utilizzare il criterio del confronto asintotico. Il termine generale è asintotico a $\frac{1}{n^2}$ e quindi la serie ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata con $a = 2$. Tale serie converge e quindi anche la serie proposta converge.

ESEMPIO: si vuole studiare il carattere della serie $\sum \frac{\ln n}{n}$. Si può applicare il criterio del confronto. Il termine generale della serie è $\frac{\ln n}{n}$ è sempre maggiore di $\frac{1}{n}$. La serie $\sum \frac{1}{n}$ è la serie armonica e, come sappiamo, diverge. Poiché la serie proposta ha ogni termine maggiore della serie armonica che è divergente, anch'essa è divergente.

OSSERVAZIONE: come si è visto, per stabilire il carattere di una serie è utile stabilire l'ordine di grandezza dell'infinitesimo rappresentato dal termine generale. Per fare questo sarà utile ricordare le gerarchie di infinitesimi e infiniti che avevamo studiato nelle lezioni sulle successioni.

Esercizi

1. La serie $\sum \frac{\sqrt{n}}{n+1}$
   a) converge
   b) diverge
   c) è irregolare
   d) è armonica
2. Sia $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ per } n < 100 \\ \frac{1}{n^2} \text{ per } n \geq 100 \end{cases}$. Allora la serie $\sum a_n$
   a) converge
   b) diverge
   c) è irregolare
   d) dipende da n
3. La serie $\sum \frac{5n + 4^n}{\ln n + 5^n}$
   a) converge
   b) diverge
   c) è irregolare
   d) è geometrica
4. Studiare il carattere delle seguenti serie:
   a) $\sum \frac{n + e^{-n}}{2n^2 + 3}$
   b) $\sum \frac{\ln n - \sqrt{n}}{5n^4 - 1}$
   c) $\sum n^{100} e^{-n}$
5. Le due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=50}^{\infty} a_n$ hanno lo stesso carattere?
   a) sì, sempre
   b) no, mai
   c) dipende dal termine a_n
   d) dipende da quanto è grande l'indice

Soluzioni

1. La serie $\sum \frac{\sqrt{n}}{n+1}$
   a) converge
   b) diverge GIUSTA
   c) è irregolare
   d) è armonica

   Il termine generale della serie è asintotico a $\frac{1}{\sqrt{n}}$ e quindi la serie si comporta come una serie armonica generalizzata con a = 1/2, quindi divergente.
2. Sia $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ per } n < 100 \\ \frac{1}{n^2} \text{ per } n \geq 100 \end{cases}$. Allora la serie $\sum a_n$
   a) converge GIUSTA
   b) diverge
   c) è irregolare
   d) dipende da n

   Il carattere di una serie è determinato dalle sue proprietà "definitive". Quindi dobbiamo guardare solo gli infiniti termini $\frac{1}{n^2}$ per n > 100. La serie è definitivamente uguale ad un'armonica generalizzata con a = 2 e quindi converge
3. La serie $\sum \frac{5n+4^n}{\ln n + 5^n}$
   a) converge GIUSTA
   b) diverge
   c) è irregolare
   d) è geometrica

   Il termine generale della serie è asintotico a $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ che è il termine generale di una serie geometrica di ragione 4/5. Poiché la ragione è minore di 1 la serie converge e quindi converge anche la serie proposta (che però non è una serie geometrica essa stessa!)
4. Studiare il carattere delle seguenti serie:
   a) $\sum \frac{n+e^{-n}}{2n^2+3}$. Divergente. Termine generale asintotico a $\frac{1}{2n}$
   b) $\sum \frac{\ln n - \sqrt{n}}{5n^4-1}$. Convergente. Termine generale asintotico a $\frac{1}{5n^{7/2}}$
   c) $\sum n^{100}e^{-n}$. Convergente. Il termine generale tende a zero come un'esponenziale (ricordando che l'esponenziale cresce più velocemente di qualsiasi potenza)
5. Le due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=50}^{\infty} a_n$ hanno lo stesso carattere?
   a) sì, sempre GIUSTA

b) no, mai
c) dipende dal termine a_n
d) dipende da quanto è grande l'indice

Poiché il carattere di una serie è determinato dalle proprietà "definitive" del suo termine generale, le due serie proposte hanno lo stesso carattere (e i primi 50 termini non hanno influenza sul fatto che la serie diverga o converga).

Esercizi da temi d'esame sulle serie

Prove parziali

1. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+8}{n^3+9}$
   a) converge
   b) diverge a $+\infty$
   c) è irregolare
   d) converge a 0
2. Il terzo termine della successione delle ridotte (somme parziali) della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2}$ è
   a) 2
   b) 49
   c) 4
   d) 49/2
3. Se risulta $\sum_{n=0}^{\infty} p^n = 6$, allora
   a) p = 1/6
   b) p_n converge a 6
   c) la successione delle ridotte converge a 0
   d) p = 5/6
4. La somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2 \cdot 2^n}$ è
   a) 3
   b) 1/3
   c) 2/3
   d) 3/2
5. La somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ è
   a) −1/5
   b) −1/6
   c) −1/3
   d) −1/4
6. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+\ln n}$ è
   a) Convergente
   b) Irregolare
   c) Geometrica
   d) Divergente
7. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{e^{2n}+2n}$ è
   a) convergente
   b) irregolare
   c) armonica
   d) divergente

Temi d'esame

1. Sia $q = -2/3$. Determinare il carattere della successione $a_n = q^n$ e quello della serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.
2. Si consideri la successione definita per ricorrenza $a_0 = 6$, $a_{n+1} = \frac{2}{5} a_n$. Calcolare il termine generale della successione e stabilire se la successione converge (nel qual caso calcolarne il limite) o diverge. Stabilire se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (nel qual caso calcolarne la somma) o diverge.
3. Il valore attuale di una rendita perpetua è dato da una serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{(1+i)^n}$ dove $i > -1$ è il tasso di interesse composto. Considerato $R = 30$, determinare per quali valori di i la serie converge e calcolarne la somma.
4. Data la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2a-1}{a+3} \right)^n$ con a parametro reale, determinare per quali valori di a la serie converge e calcolarne la somma per $a = 0$.

Prove parziali

1. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+8}{n^3+9}$
   a) Converge GIUSTA
   b) diverge a $+\infty$
   c) è irregolare
   d) converge a 0

   Il termine generale è asintotico a $\frac{1}{n^2}$

2. Il terzo termine della successione delle ridotte (somme parziali) della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{n^2}$ è
   a) 2
   b) 49
   c) 4
   d) 49/2 GIUSTA

   Basta calcolare $a_1 + a_2 + a_3 = 18 + \frac{9}{2} + 2 = \frac{49}{2}$

3. Se risulta $\sum_{n=0}^{\infty} p^n = 6$, allora
   a) p = 1/6
   b) p_n converge a 6
   c) la successione delle ridotte converge a 0
   d) p = 5/6 GIUSTA

   Si tratta di una serie geometrica di ragione *p*. che converge quindi al valore $\frac{1}{1-p}$. Se questo valore è uguale a 6 allora $\frac{1}{1-p} = 6$ da cui $1 = 6 - 6p$, cioè $p = 5/6$

4. La somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2 \cdot 2^n}$ è
   a) 3 GIUSTA
   b) 1/3
   c) 2/3
   d) 3/2

   Riscrivendo la serie proposta come $\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ si vede che si tratta di una serie geometrica di ragione 1/2, la cui somma è 2. Quindi la somma della serie proposta è 3.

5. La somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ è
   a) −1/5 GIUSTA
   b) −1/6
   c) −1/3

d) −1/4

Si tratta di una serie geometrica di ragione −1/4 che converge a $\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{4}{5}$ privata del primo termine che è 1. La sua somma è quindi $\frac{4}{5}-1=-\frac{1}{5}$

6. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+\ln n}$ è
   a) Convergente
   b) Irregolare
   c) Geometrica
   d) Divergente GIUSTA

   Il termine generale è asintotico a $\frac{1}{n}$ e poiché la serie armonica diverge, la serie proposta diverge.

7. La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{e^{2n}+2n}$ è
   a) Convergente GIUSTA
   b) irregolare
   c) armonica
   d) divergente

   Il termine generale è asintotico a $\frac{e^n}{e^{2n}}=\frac{1}{e^n}$ che tende a zero più velocemente di qualsiasi potenza negativa di *n*. Quindi la serie converge.

Temi d'esame

1. Sia $q = -2/3$. Determinare il carattere della successione $a_n = q^n$ e quello della serie $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$. La successione $a_n=q^n=\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ converge a 0. La serie è una serie geometrica di ragione −2/3 e converge al valore $\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{3}{5}$

2. Si consideri la successione definita per ricorrenza $a_0 = 6$, $a_{n+1}=\frac{2}{5}a_n$. Calcolare il termine generale della successione e stabilire se la successione converge (nel qual caso calcolarne il limite) o diverge. Stabilire se la serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge (nel qual caso calcolarne la somma) o diverge. La successione può essere riscritta come $a_n=6\left(\frac{2}{5}\right)^n$. Si tratta di una successione

convergente a 0. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} 6\left(\frac{2}{5}\right)^n = 6\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ è una serie geometrica di ragione 2/5 che converge alla somma $\frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3}$. La serie proposta, quindi, converge al valore $6 \cdot \frac{5}{3} = 10$.

3. Il valore attuale di una rendita perpetua è dato da una serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{(1+i)^n}$ dove $i > -1$ è il tasso di interesse composto. Considerato *R* = 30, determinare per quali valori di *i* la serie converge e calcolarne la somma. Riscrivendo la serie proposta come $R\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}$ si vede che si tratta di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{1+i}$ che converge quando $-1 < \frac{1}{1+i} < 1$ cioè per tutti gli *i* positivi. La somma della serie "completa" è $\frac{1}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{1+i}{i} = \frac{1}{i}+1$ ma il primo termine (che vale 1) manca e quindi la somma è $\frac{1}{i}$. Posto *R* = 30, il valore della rendita perpetua è $\frac{30}{i}$.

4. Data la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2a-1}{a+3}\right)^n$ con *a* parametro reale, determinare per quali valori di *a* la serie converge e calcolarne la somma per *a* = 0. Si tratta di una serie geometrica che converge quando la ragione è compresa tra –1 e 1. Quindi bisogna risolvere le disequazioni $-1 < \frac{2a-1}{a+3} < 1$. Esse si traducono nel sistema $\begin{cases} -1 < \frac{2a-1}{a+3} \\ \frac{2a-1}{a+3} < 1 \end{cases}$ che si può semplificare in $\begin{cases} \frac{3a+2}{a+3} > 0 \\ \frac{a-4}{a+3} < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a < -3 \text{ e } a > -\frac{2}{3} \\ -3 < a < 4 \end{cases}$ la cui soluzione è $-\frac{2}{3} < a < 4$, valori per cui la serie converge. Per *a* = 0, la serie diventa $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$. La somma della serie "completa" è $\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}$. A questo valore vanno tolti i primi due termini che sono 1 e –1/3. La somma della serie proposta è quindi
$\frac{3}{4} - \left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

Lezione 54-55-56-57

Premessa

Le funzioni derivabili e costanti (come è stato detto nelle lezioni relative al calcolo differenziale) hanno la derivata nulla. Tale proprietà è invertibile sugli intervalli perché vale il seguente teorema

TEOREMA: se una funzione *f* è derivabile su un intervallo (*a*, *b*) e ha derivata uguale a zero, allora la funzione è costante.

OSSERVAZIONE: l'ipotesi che la funzione sia definita in un intervallo (*a*, *b*) è necessaria. Infatti possono esistere funzioni che hanno derivata uguale a zero e non sono costanti, come ad esempio $f(x)=\begin{cases}1 \text{ per } x \geq 0 \\ 0 \text{ per } x < 0\end{cases}$. Il grafico della funzione è il seguente

e come si vede si tratta di una funzione non costante.

Immediata conseguenza di questo teorema è il seguente.

TEOREMA: se *f* e *g* sono due funzioni differenziabili in un intervallo (*a*, *b*) e per ogni *x* tale che $a < x < b$ si ha $f'(x)=g'(x)$, allora le due funzioni differiscono per una costante, cioè $f(x)=g(x)+k$

Funzioni primitive

DEFINIZIONE: sia *f* una funzione definita in un intervallo (a, b). La funzione differenziabile *G* si dice *primitiva* di *f* se per ogni *x* in (a, b) vale la relazione $G'(x)= f(x)$, cioè *f* è la derivata di *G*.

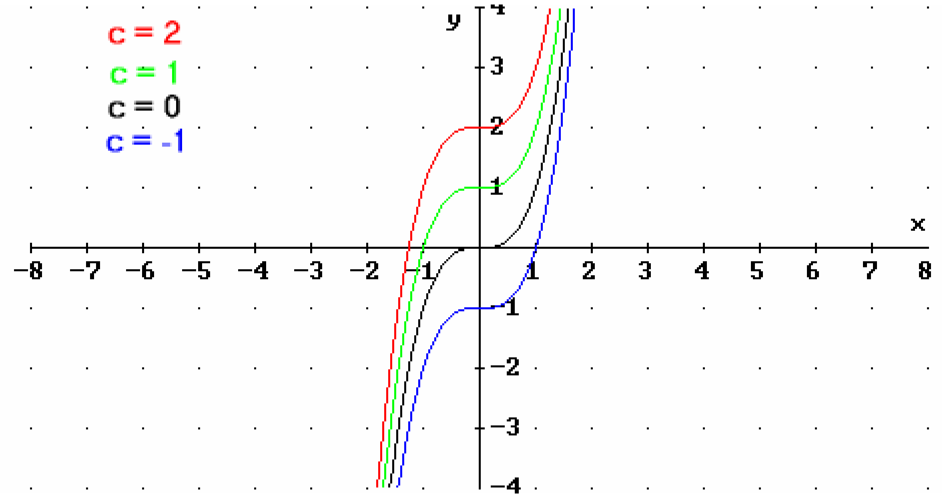
ESEMPIO: la funzione $G(x)=x^2$ è una primitiva della funzione $f(x)=2x$ in ogni intervallo dell'asse reale perché $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$ dovunque. La funzione $G(x)=\ln x$ è una primitiva della funzione $f(x)=\frac{1}{x}$ nell'intervallo $x > 0$.

TEOREMA: se *G* è una primitiva di *f* in un dato intervallo, allora tutte le primitive di *f* differiscono da *G* per una costante.

ESEMPIO: ogni funzione del tipo x^2+c è una primitiva della funzione $f(x)=2x$ e, anzi, tutte le primitive della funzione $2x$ sono del tipo x^2+c.

DEFINIZIONE: l'insieme delle primitive di una funzione $f(x)$ si indica con il simbolo $\int f(x)dx$ e viene chiamato *integrale indefinito* di *f*. In simboli, se *G* è una primitiva di *f*, si ha $\int f(x)dx = G(x)+c$. *f* è detto *integrando* o *funzione integranda*.

OSSERVAZIONE: l'insieme delle primitive è costituito da un'infinità di funzioni tutte *parallele* tra loro. Ad esempio, nel caso della funzione x^2 l'integrale indefinito è dato dalle funzioni $\frac{1}{3}x^3+c$ che, al variare di *c* è rappresentato nel grafico seguente:



Se il problema richiede di trovare una primitiva che passi per un particolare punto del piano, allora si può determinare la costante c e in questo caso si trova una sola funzione. Nell'esempio precedente, se si vuole che la primitiva di x^2 passi per il punto (3, 10) allora vuol dire che sostituendo i valori 3 e 10 alla x e alla y nella primitiva l'uguaglianza deve essere verificata.

Pertanto da $y = \frac{x^3}{3} + c$ sostituendo si ha $10 = \frac{3^3}{3} + c$ cioè $10 = 9 + c$ da cui $c = -1$.

REGOLE FONDAMENTALI DI INTEGRAZIONE: i seguenti esempi sono ricavati in modo diretto dalle regole di derivazione delle funzioni.

Funzione	Primitiva
e^x	$e^x + c$
x^a per qualunque $a \neq -1$ in $(0, +\infty)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$
$\frac{1}{x}$ in $(0, +\infty)$	$\ln x + c$
$\frac{1}{x}$ in $(-\infty, 0)$	$\ln(-x) + c$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$

OSSERVAZIONE: quando non si specifica l'intervallo di integrazione indefinita, la primitiva di ln x si indica sinteticamente con ln $|x|$. Osserviamo, però, che tale scrittura può essere fuorviante, perché non ha senso parlare di unica primitiva in un insieme che non è un intervallo.

Regole di integrazione.

Poiché la derivata è un operatore lineare anche l'integrale indefinito lo è. Vale infatti la seguente proprietà:

PROPRIETÀ: valgono le seguenti uguaglianze

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

ESEMPIO: la proprietà precedente si applica ogni qual volta l'integrando è una somma di multipli. Se ad esempio bisogna calcolare l'integrale indefinito $\int\left(5x^2+3x-4e^x\right)dx$ possiamo scrivere l'integrale così: $\int 5x^2dx+\int 3xdx-\int 4e^xdx=5\int x^2dx+3\int xdx-4\int e^xdx$ e ricordando le formule fondamentali si ha $5\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}-4e^x+c$. La costante c di integrazione è unica per tutti e tre gli integrali indefiniti e quindi non si scrive $c_1+c_2+c_3$ ma semplicemente c riassumendo le tre costanti in una.

ESEMPIO: per calcolare l'integrale indefinito $\int\frac{3x+5}{\sqrt{x}}dx$ si può scomporre la frazione nei suoi addendi

$$\int\left(\frac{3x}{\sqrt{x}}+\frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx=\int 3\sqrt{x}dx+\int\frac{5}{\sqrt{x}}dx=\int 3x^{1/2}dx+\int 5x^{-1/2}dx=3\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}+5\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}+c=2x^{3/2}+10x^{1/2}+c$$

ATTENZIONE: nel calcolo degli integrali conviene sempre svolgere la verifica e cioè derivare l'espressione ottenuta come risultato e controllare che risulti uguale all'integrando.

Integrazione per parti

La regola di derivazione del prodotto di due funzioni ha un analogo nella regola di integrazione per parti. Date due funzioni *f* e *g*, la derivata del loro prodotto è $\frac{d}{dx}(fg)=\frac{df}{dx}g+\frac{dg}{dx}f$. Calcoliamo l'integrale indefinito di entrambi i membri di questa equazione. Al primo membro si ha semplicemente *fg* mentre al secondo si ha $\int\frac{df}{dx}gdx+\int\frac{dg}{dx}fdx$, cioè

$$fg=\int\frac{df}{dx}gdx+\int\frac{dg}{dx}fdx$$

oppure

$$\int\frac{df}{dx}gdx=fg-\int\frac{dg}{dx}fdx$$

La formula precedente viene detta *formula di integrazione per parti*. Essa è utile quando un integrale da calcolare si può pensare come il prodotto di una funzione derivata (la *f*) per un'altra non derivata (la *g*). La funzione derivata si chiama anche *fattore differenziale* e l'altra si chiama *fattore intero*. Calcolando l'integrale indefinito di *f* e la derivata di *g*, si può trasformare l'integrale proposto nel secondo membro che contiene un termine semplice, *fg*, e un altro integrale che, essendo diverso da quello proposto, potrebbe essere più semplice da calcolare. Spieghiamo il suo utilizzo attraverso un esempio.

ESEMPIO: sia da calcolare $\int xe^xdx$. L'integrando si presenta come un prodotto di due funzioni, x e e^x. Poniamo $g(x)=x$ e $\frac{df}{dx}=e^x$. Allora $\frac{dg}{dx}=1$ e $f(x)=e^x$. Applichiamo la formula di integrazione per parti: $\int xe^xdx=xe^x-\int 1\cdot e^xdx=xe^x-e^x+c$.

ATTENZIONE: la scelta dei fattori è importante: una scelta errata può portare a un integrale più complicato di quello di partenza. Ad esempio, nell'integrale precedente scegliendo $\frac{df}{dx}=x$ e $g(x)=e^x$ e quindi $f(x)=\frac{x^2}{2}$ e $\frac{dg}{dx}=e^x$ e si sarebbe arrivati alla relazione $\int xe^x dx=\frac{x^2}{2}e^x-\int\frac{x^2}{2}e^x dx$. Come si vede, l'integrale proposto è più complicato di quello di partenza.

OSSERVAZIONE: la scelta dei fattori intero e differenziale non è casuale. Poiché nell'integrale che risulta dalla formula di integrazione per parti i due fattori risultano rispettivamente derivato e integrato, conviene scegliere come fattore intero un'espressione che derivata si semplifica e come fattore differenziale una che integrata si semplifica. Con riferimento all'esempio precedente, scegliendo i due fattori x e e^x poiché il primo derivato si semplifica (e integrato aumenta di grado) mentre il secondo è indifferente alle due operazioni (perché la derivata e l'integrale indefinito di e^x è ancora e^x) la scelta corretta risulta immediata.

ESEMPIO: si debba integrare $\int x\ln x dx$. Non conosciamo una primitiva di ln *x* e quindi conviene scegliere $\frac{df}{dx}=x$ e $g(x)=\ln x$ da cui $f(x)=\frac{x^2}{2}$ e $\frac{dg}{dx}=\frac{1}{x}$. Applicando la formula si ha

$$\int x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c$$

Integrazione per sostituzione

Un'altra formula che permette di calcolare alcuni integrali indefiniti deriva dalla formula per la derivazione della funzione composta. Se $f(g(x))$ è una funzione composta, la sua derivata rispetto a *x* è $\frac{df(g(x))}{dx}=\frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$, cioè il prodotto delle derivate di *f* fatta rispetto al suo argomento e di *g* fatta rispetto ad *x*. Osserviamo che calcolando l'integrale indefinito dei due membri dell'ultima equazione si ottiene a sinistra $f(x)$ e a destra un integrale in cui compaiono una funzione *f* di un argomento *g* e la derivata dell'argomento *g* stesso. Per semplificare il calcolo di questo integrale, basterà usare un accorgimento analogo a quello utilizzato per svolgere il calcolo della derivata della funzione composta: sostituire al posto di *g* un'altra variabile in modo da eliminare formalmente il secondo fattore.

ESEMPIO: sia da calcolare $\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$. Ci accorgiamo che nell'integrando è presente una funzione di x^2+1 e la sua derivata $2x$. Poniamo quindi $u=x^2+1$ e calcoliamo il differenziale a sinistra di *u* e a destra dell'espressione x^2+1: $du=2xdx$ (il differenziale è il prodotto della derivata prima per il fattore *dx*). Adesso possiamo "sostituire" nell'integrale proposto:

$$\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\int u^{-1/2}du=\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{u}+c=2\sqrt{x^2+1}+c$$

Come si vede, la sostituzione ha portato ad un integrale immediato e poi, sostituendo di nuovo l'espressione in *x* al posto di *u*, siamo arrivati al risultato finale.

OSSERVAZIONE: la scelta della sostituzione non è sempre immediata. Quando, come nell'esempio precedente, siano presenti una funzione di una certa espressione e la derivata della stessa espressione moltiplicata per *dx* è in genere consigliabile l'uso della sostituzione.

ESEMPIO: calcolare l'integrale $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$. Ci accorgiamo che nell'integrando sono presenti una funzione di ln *x* e la derivata di ln *x*, cioè $\frac{1}{x}$. Poniamo quindi $u = \ln x$ da cui $du = \frac{1}{x} dx$. Allora

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c$$

In qualche caso si può provare una sostituzione che semplifichi l'integrale sperando che il calcolo modificato sia più semplice di quello proposto

ESEMPIO: sia da calcolare l'integrale indefinito $\int x\sqrt{x-1}dx$. Non si vede a prima vista una soluzione semplice. Tuttavia, sarebbe comodo eliminare la radice quadrata dall'integrando. Proviamo quindi a porre $\sqrt{x-1} = t$, cioè $x - 1 = t^2$ che, differenziando, dà $dx = 2tdt$. L'integrale proposto risulta

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \int (t^2+1)t2tdt = 2\int (t^4+t^2)dt = 2\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)+c = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + c$$

OSSERVAZIONE: i metodi che abbiamo usato per trovare gli integrali indefiniti di una funzione *f* non permettono sempre di trovare una primitiva di una qualsiasi funzione *f*. Esistono, infatti, funzioni di cui non è possibile trovare una primitiva come, ad esempio, $\frac{e^x}{x}$.

Funzioni razionali fratte

Concludiamo la lezione studiando l'integrale indefinito di una particolare classe di funzioni: le funzioni razionali fratte, cioè i quozienti di polinomi. Ad esempio, la funzioni $f(x) = \frac{3x^3+5x^2+x}{x^2+x-2}$ e $g(x) = \frac{2x-3}{x^2-4}$. Innanzi tutto, se il grado del numeratore *N* è maggiore del grado del denominatore *D* possiamo sempre dividere *N* per *D* per avere la somma di un polinomio e di una funzione razionale. Ad esempio, nel primo caso, si ha $f(x) = \frac{3x^3+5x^2+x}{x^2+x-2} = 3x+2+\frac{5x+4}{x^2+x-2}$. Poiché i polinomi si integrano abbastanza facilmente, possiamo dedicarci solo alle funzioni razionali con grado del numeratore inferiore a quello del denominatore.
In particolare considereremo il caso in cui il denominatore *D* è un polinomio di secondo grado in cui il coefficiente *a* di x^2 è 1 (se così non fosse si potrebbe comunque dividere numeratore e denominatore per *a*. L'equazione *D* = 0 può avere 2 soluzioni, oppure 1 oppure nessuna. Consideriamo separatamente i primi due casi.

Due soluzioni distinte

In tal caso, $D=(x-r)(x-s)$ e possiamo scrivere l'integrando come $\dfrac{cx+d}{(x-r)(x-s)}$. Questa espressione può risultare dalla somma di due frazioni $\dfrac{A}{x-r}+\dfrac{B}{x-s}$ dopo il minimo comune multiplo. Se si riesce a ricavare A e B in modo che l'uguaglianza $\dfrac{A}{x-r}+\dfrac{B}{x-s}=\dfrac{cx+d}{(x-r)(x-s)}$ allora invece di svolgere l'integrale proposto si può svolgere l'integrale della somma di frazioni che è più semplice.

ESEMPIO: nell'esempio precedente risulta $\dfrac{5x+4}{x^2+x-2}$. L'equazione $x^2+x-2=0$ ha due soluzioni: 1 e –2, quindi possiamo cercare di scrivere $\dfrac{5x+4}{x^2+x-2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}$. Svolgendo i conti a destra si ha $\dfrac{5x+4}{x^2+x-2}=\dfrac{A(x+2)+B(x-1)}{x^2+x-2}=\dfrac{x(A+B)+2A-B}{x^2+x-2}$. Perché le due espressioni risultino uguali è necessario che $\begin{cases}A+B=5\\2A-B=4\end{cases}$. Si tratta di un sistema la cui soluzione è A = 3 e B = 2. Quindi $\dfrac{3x+4}{x^2+x-2}=3\dfrac{1}{x-1}+2\dfrac{1}{x+2}$. Pertanto,

$$\int\frac{3x^3+5x^2+x}{x^2+x-2}dx=\int\left(2x+x+\frac{3x+4}{x^2+x-2}\right)dx=\int\left(2x+2+3\frac{1}{x-1}+2\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$=\frac{x^2}{2}+2x+3\ln(x-1)+2\ln(x+2)+c$$

Due soluzioni coincidenti

In tal caso, $D=(x-r)^2$ e possiamo scrivere l'integrando come $\dfrac{cx+d}{(x-r)^2}$. Questa espressione può risultare dalla somma di due frazioni $\dfrac{A}{x-r}+\dfrac{B}{(x-r)^2}$ dopo il minimo comune multiplo. Se si riesce a ricavare A e B in modo che l'uguaglianza $\dfrac{A}{x-r}+\dfrac{B}{(x-r)^2}=\dfrac{cx+d}{(x-r)^2}$ allora invece di svolgere l'integrale proposto si può svolgere l'integrale della somma di frazioni che è più semplice.

ESEMPIO: calcoliamo $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x^2+4x+4}dx$. Poiché l'equazione $x^2+4x+4=0$ ha due soluzioni coincidenti uguali a –2, si può scrivere l'integrando come $\dfrac{2x+1}{x^2+4x+4}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{(x+2)^2}$.

Sviluppando il secondo membro si ha $\dfrac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}=\dfrac{Ax+2A+B}{(x+2)^2}$ e, affinché ci sia l'uguaglianza, deve essere A = 2 e B + 2A = 1, da cui B = –3. Quindi

$$\int\frac{2x+1}{x^2+4x+4}dx=\int\left(\frac{2}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}\right)dx=2\ln|x+2|+\frac{3}{x+2}+c$$

Nessuna soluzione

La soluzione si basa sull'osservazione che $\frac{d}{dx} arc\tan x = \frac{1}{1+x^2}$. Diamo solo la formula in un caso particolare: $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arc\tan \frac{x}{a} + c$ (la funzione arc tan x è la funzione inversa della tangente trigonometrica)

Esercizi (da temi d'esame)

1. Calcolare una primitiva di $\dfrac{3}{x(x+3)}$
2. Determinare una primitiva di $6x-3x\ln x$ nell'intervallo (0, e^2]
3. Trovare una primitiva di e^{-2x} e di $\dfrac{1}{x^a}$ con a > 1.
4. Il costo marginale di un bene è $C'(q)=\dfrac{3000}{6q+e^5}$. Determinare il costo totale di produzione $C(q)$ nell'ipotesi che il costo fisso sia $C(0)=5000$. Calcolare l'incremento del costo totale di produzione $C(q)$ se la produzione passa da $q_0 = e^5$ a $q_1 = 2e^5$.
5. (dal libro) Calcolare una primitiva della funzione $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ applicando i due metodi di integrazione (sostituzione, per parti)

Soluzioni

1. Calcolare una primitiva di $\dfrac{3}{x(x+3)}$. Si tratta di una funzione razionale. Il denominatore è di secondo grado e l'equazione $x(x+3)=0$ ha due soluzioni, $x = 0$ e $x = -3$. Possiamo quindi scrivere $\dfrac{3}{x(x+3)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+3}$. Sviluppando il secondo membro si ha $\dfrac{x(A+B)+3A}{x(x+3)}$ da cui, per avere l'uguaglianza, ricaviamo $A + B = 0$ e $3A = 3$, cioè $A = 1$ e $B = -1$. Allora $\dfrac{3}{x(x+3)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}$. Dobbiamo quindi calcolare
$$\int \frac{3}{x(x+3)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\ln|x|-\ln|x+3|+c=\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+c$$
2. Determinare una primitiva di $6x-3x\ln x$ nell'intervallo $(0, e^2]$. Bisogna calcolare $\int(6x-3x\ln x)dx$. Il calcolo di $\int 6xdx=3x^2+c$ è semplice. Per integrare $\int 3x\ln xdx$ utilizziamo la formula di integrazione per parti. Poniamo $\dfrac{df}{dx}=3x$ e $g(x)=\ln x$ da cui $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2$ e $\dfrac{dg}{dx}=\dfrac{1}{x}$. Quindi $\int 3x\ln xdx=\dfrac{3}{2}x^2\ln x-\int\dfrac{3}{2}x^2\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{3}{2}x^2\ln x-\dfrac{3}{2}\int xdx=\dfrac{3}{2}x^2\ln x-\dfrac{3}{4}x^2$.
Pertanto, $\int(6x-3x\ln x)dx=3x^2-\dfrac{3}{2}x^2\ln x+\dfrac{3}{4}x^2+c=\dfrac{15}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x^2\ln x+c$
3. Trovare una primitiva di e^{-2x} e di $\dfrac{1}{x^a}$ con $a > 1$. Dobbiamo calcolare $\int e^{-2x}dx$ e $\int x^{-a}dx$ con $a > 1$. Il primo integrale si risolve facilmente con la sostituzione $u=-2x$ da cui $du=-2dx$ e $-\dfrac{1}{2}du=dx$. Quindi $\int e^{-2x}dx=-\dfrac{1}{2}\int e^u du=-\dfrac{1}{2}e^u+c=-\dfrac{1}{2}e^{2x}+c$. Per il secondo applichiamo direttamente la formula fondamentale per ottenere $\int x^{-a}dx=\dfrac{x^{-a+1}}{-a+1}+c$.
4. Il costo marginale di un bene è $C'(q)=\dfrac{3000}{6q+e^5}$. Determinare il costo totale di produzione $C(q)$ nell'ipotesi che il costo fisso sia $C(0)=5000$. Calcolare l'incremento del costo totale di produzione $C(q)$ se la produzione passa da $q_0 = e^5$ a $q_1 = 2e^5$. Il costo marginale è la derivata del costo totale, quindi il calcolo del costo fisso è il calcolo dell'integrale indefinito $C(q)=\int\dfrac{3000}{6q+e^5}dq=3000\dfrac{1}{6}\ln(6q+e^5)+c=500\ln(6q+e^5)+c$. La costante c si determina sapendo che $C(0) = 5000$. Poiché $C(0)=500\ln(6\cdot 0+e^5)+c=500\ln(e^5)+c=500\cdot 5+c=2500+c$ la condizione $C(0)=5000$ implica $c = 2500$. Quindi la funzione costo totale è $C(q)=500\ln(6q+e^5)+2500$.
Il costo per $q_0 = e^5$ è $C_0=C(e^5)=500\ln(6e^5+e^5)+2500=500\ln(7e^5)+2500$
Il costo per $q_0 = 2e^5$ è $C_1=C(2e^5)=500\ln(12e^5+e^5)+2500=500\ln(13e^5)+2500$
L'incremento di costo è quindi $C_1-C_0=500[\ln(13e^5)-\ln(7e^5)]=500\ln\dfrac{13e^5}{7e^5}=500\ln\dfrac{13}{7}\approx 309$

5. (dal libro) Calcolare una primitiva della funzione $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ applicando i due metodi di integrazione (sostituzione, per parti).
   Metodo di sostituzione: non si vede, a prima vista, una funzione e la sua derivata. Poniamo però $x+1=t^2$ da cui differenziando $dx = 2tdt$. L'integrale indefinito proposto risulta quindi uguale a $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{t^2-1}{\sqrt{t^2}}2tdt = \int \frac{t^2-1}{t}2tdt = 2\int (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+c$ cioè $2\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3}-\sqrt{x+1}\right)+c$

   Metodo per parti: poiché sappiamo che la derivata di $\sqrt{x+1}$ è $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ poniamo $g(x)=x$ e $\frac{df(x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ da cui $\frac{dg(x)}{dx}=1$ e $f(x)=2\sqrt{x+1}$. Pertanto, si ha $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = 2x\sqrt{x+1}-2\int \sqrt{x+1}dx = 2x\sqrt{x+1}-2\left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3\right)+c$. Per risolvere il secondo integrale si può porre $x+1=u$ da cui $dx = du$ e poi integrare secondo le regole di integrazione delle funzioni potenza.

Lezione 58-59-60

Il concetto di integrale definito. La classe delle funzioni integrabili

Il concetto di integrale definito è completamente diverso dal precedente di integrale indefinito e, in un certo senso, lo precede.
Il problema è, in generale, quello del calcolo di aree sottese da una curva. Sia data una curva $y = f(x)$ definita in un intervallo $[a, b]$ e quindi il suo grafico. Il calcolo dell'area compresa tra il grafico della curva e l'asse delle ascisse presenta alcuni problemi:

- in generale, la forma della curva è complessa e non esistono formule semplici (come ad esempio per il calcolo delle aree del triangolo, trapezio, ecc.)
- il grafico della funzione potrebbe incontrare l'asse delle x tra a e b. In questo caso, ci si deve porre la domanda "come si calcolano le aree che stanno *sotto* l'asse delle ascisse?"

La soluzione sta in una procedura di calcolo che prevede un tipo particolare di passaggio al limite. Immaginiamo di dividere l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli (x_i, x_{i+1}) con $i = 0, 1, \dots, n-1$. Sarà quindi $x_0 = a$ e $x_n = b$. La superificie di cui dobbiamo calcolare l'area risulta così divisa in n "rettangoli" e l'area è uguale alla somma delle aree dei "rettangoli". Il termine rettangoli è indicato in corsivo perché non si tratta di rettangoli veri e propri poiché un lato è curvo. Se prendiamo, per ogni intervallo, un valore $\bar{x}_i$ scelto a caso tra tutti quelli assunti dalla funzione all'interno dell'intervallo possiamo approssimare l'area con il prodotto della lunghezza della base $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ (l'ampiezza dell'intervallo) per l'altezza (il valore della funzione nel punto scelto). Sommando tutte le approssimazioni così ottenute abbiamo una stima dell'area cercata.

In formule, abbiamo calcolato $\sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$.

Se ora pensiamo di aumentare n ci dobbiamo aspettare che l'approssimazione migliori essenzialmente perché il campo di scelte per $\bar{x}_i$ diminuisce e quindi diminuisce l'arbitrarietà. Inoltre possiamo sempre pensare che gli intervalli siano tutti uguali a $\frac{b-a}{n}$. Vogliamo quindi scoprire se è possibile calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)$. Si faccia attenzione al fatto che in questo limite non varia solo n ma con essa anche la scelta di $\bar{x}_i$.

DEFINIZIONE: se il limite della somma $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)$ esiste ed è indipendente dalla scelta dei punti $\bar{x}_i$ tale limite si chiama *integrale definito tra a e b della funzione f(x)* e si indica col simbolo $\int_a^b f(x)dx$.

OSSERVAZIONE: la notazione deriva da quella della sommatoria:

- l'indice scompare perché la somma è estesa ad infiniti termini ma compare la variabile di integrazione che, analogamente a quanto avviene per l'indice nella sommatoria, è "muta" nel senso che, per esempio, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.
- l'ampiezza Δx diventa dx quando si passa al limite

- la lettera greca sigma cambia in una "s" allungata.

Data la definizione ci si può chiedere per quali funzioni è effettivamente possibile calcolare il limite. La teoria fornisce il seguente teorema:

TEOREMA: sono integrabili:
- le funzioni continue
- le funzioni che hanno un numero finito di punti di discontinuità
- le funzioni monotone (anche se non continue)

OSSERVAZIONE: con questa definizione, l'area sottesa da una curva *al di sotto* dell'asse delle ascisse è calcolata con il segno negativo.

Il calcolo dell'integrale definito: il primo teorema fondamentale del calcolo integrale

Il calcolo dell'integrale secondo la definizione è praticamente inutilizzabile. Occorre quindi ricorrere ad un altro strumento fornito dalla teoria

TEOREMA (primo teorema fondamentale): sia *G* una primitiva di *f* sull'intervallo [*a*, *b*]. Allora se *f* è integrabile nell'intervallo [*a*, *b*] vale la formula $\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a)$.

DIMOSTRAZIONE: dato l'intervallo [*a*, *b*] suddividiamolo in *n* intervalli equispaziati con in punti $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$. L'ampiezza di ogni intervallo è $\frac{b-a}{n}$. Possiamo scrivere $G(b)-G(a) = G(b)-G(x_{n-1})+G(x_{n-1})-G(x_{n-2})+G(x_{n-2})-\dots+G(x_1)-G(a)$ perché nel membro di destra tutti i termini del tipo $G(x_i)$ sono scritti due volte una con il segno + l'altra con il segno –.

Riassumendo con il simbolo di sommatoria $G(b)-G(a) = \sum_{i=1}^{n}[G(x_i)-G(x_{i-1})]$. Poiché la funzione *G* è una primitiva essa è derivabile e quindi per essa vale il teorema di Lagrange. Pertanto $G(x_i)-G(x_{i-1}) = G'(\overline{x}_i)(x_i - x_{i-1})$ dove $\overline{x}_i$ è un punto interno all'intervallo $x_i - x_{i-1}$. Inoltre, poiché *G* è primitiva di *f*, $G' = f$ e quindi si può scrivere $G(b)-G(a) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)$.

Se ora passiamo al limite per *n* che tende all'infinito, poiché *f* è integrabile il termine di destra tende a $\int_a^b f(x)dx$ e quindi si ha $\int_a^b f(x)dx = G(b)-G(a)$.

OSSERVAZIONE: la variazione della funzione *G* si indica di solito con il simbolo $|G(x)|_a^b$, cioè $|G(x)|_a^b = G(b)-G(a)$

OSSERVAZIONE: ora si comprende il legame tra il calcolo della primitiva e il calcolo di un'area. Per il secondo è necessario il primo e quindi si usa lo stesso simbolo (la "s" allungata) per indicare operazioni simili: l'integrazione *indefinita* (cioè la determinazione della classe di primitive di una funzione) e l'integrazione *definita* (cioè il calcolo di un'area col suo segno).

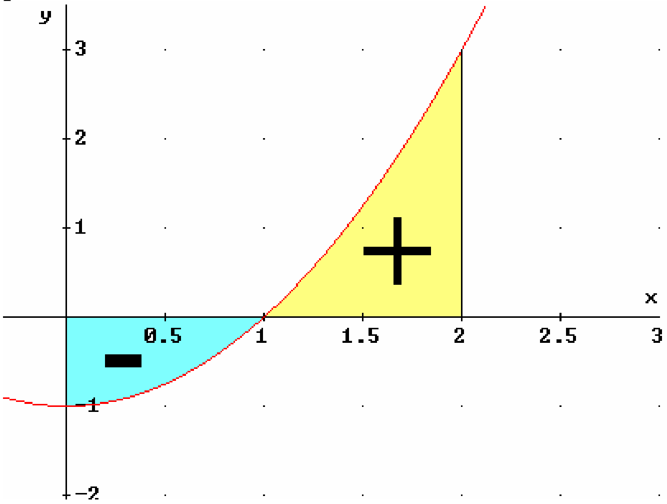
OSSERVAZIONE: il teorema suggerisce immediatamente una procedura di calcolo per un integrale definito: prima si calcola una primitiva della funzione integranda e poi si calcola la variazione della primitiva

ESEMPI:

- calcolare $\int_1^2 (x^2-2x+3)dx$. Calcoliamo una primitiva di x^2-2x+3:

  $\int (x^2-2x+3)dx = \frac{x^3}{3}-x^2+3x+c$. Poiché il risultato *non* dipende dalla primitiva possiamo scegliere semplicemente c = 0. La nostra funzione G sarà quindi $G(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+3x$. Il risultato cercato è quindi $G(2)-G(1)=\left(\frac{8}{3}-4+6\right)-\left(\frac{1}{3}-1+3\right)=\frac{7}{3}$
- calcolare $\int_2^4 \frac{1}{x}dx$. Una primitiva di $\frac{1}{x}$ è ln x. Quindi $\int_2^4 \frac{1}{x}dx = \left|\ln x\right|_2^4 = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$
- calcolare $\int_0^2 (x^2-1)dx$. Una primitiva di x^2-1 è $\frac{x^3}{3}-x$ e quindi

  $\int_0^2 (x^2-1)dx = \left|\frac{x^3}{3}-x\right|_0^2 = \left(\frac{8}{3}-2\right)-(0-0)=\frac{2}{3}$. Si osservi che per la funzione proposta l'integrale definito *non* corrisponde all'area tra la curva (la parabola) e l'asse delle ascisse perché un tratto della curva è sotto l'asse delle ascisse e quindi conta negativamente.

  L'area in giallo (che è uguale a $\int_1^2 (x^2-1)dx$) vale $\frac{4}{3}$ mentre quella in azzurro (che è uguale a $-\int_0^1 (x^2-1)dx$) vale $\frac{2}{3}$.
- (esame gennaio 2000) calcolare $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln(2x)dx$. La primitiva della funzione integranda si trova per parti (fattore intero ln(2x), fattore differenziale x^2) ed è $\frac{x^3}{3}\ln(2x)-\frac{x^3}{9}+c$. Il valore dell'integrale definito è quindi

  $\left|\frac{x^3}{3}\ln(2x)-\frac{x^3}{9}\right|_{\frac{1}{2}}^1 = \left(\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{1}{24}\ln 1-\frac{1}{72}\right)=\frac{\ln 2}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{72}=\frac{\ln 2}{3}-\frac{7}{72}$.

Proprietà dell'integrale definito

L'integrale definito gode di alcune proprietà importanti. Ecco un elenco delle principali (dove abbiamo omesso, per brevità, la dipendenza da *x* e il simbolo *dx*).

- *Additività rispetto all'intervallo di integrazione*, in simboli $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$. La proprietà è evidente se si pensa all'interpretazione geometrica. In base a questa proprietà conviene porre, quando *b* < *a* (cioè *b* è alla sinistra di *a*) che sia $\int_a^b f = -\int_b^a f$, in modo che sia anche $\int_a^a f = 0$.
- *Additività rispetto all'integrando*, in simboli $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$
- *Omogeneità*, in simboli, se *c* è una costante, $\int_a^b cf = c\int_a^b f$
- *Linearità*, diretta conseguenza delle precedenti: $\int_a^b c_1 f + c_2 g = c_1 \int_a^b f + c_2 \int_a^b g$
- *Positività*: se *f* è integrabile e non negativa (cioè maggiore o uguale a 0), allora $\int_a^b f \geq 0$
- *Monotonia*: se sono date due funzioni *f* e *g* integrabili e tali che $f \leq g$, allora $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. In particolare, vale la proprietà $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$ che risulta semplice spiegare: nel calcolo di un integrale di una generica funzione le aree "negative" si sottraggono alle aree "positive" mentre se si prende il valore assoluto della stessa funzione tutte le aree sono "positive" e quindi il risultato finale è maggiore o uguale al precedente.

Il teorema del valor medio

DEFINIZIONE: si chiama valore medio di una funzione *f* in un intervallo (*a*, *b*) il valore dell'espressione $\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

ESEMPIO: la funzione $f(x) = 3x^2 + x$ nell'intervallo (0, 2) ha valore medio uguale a

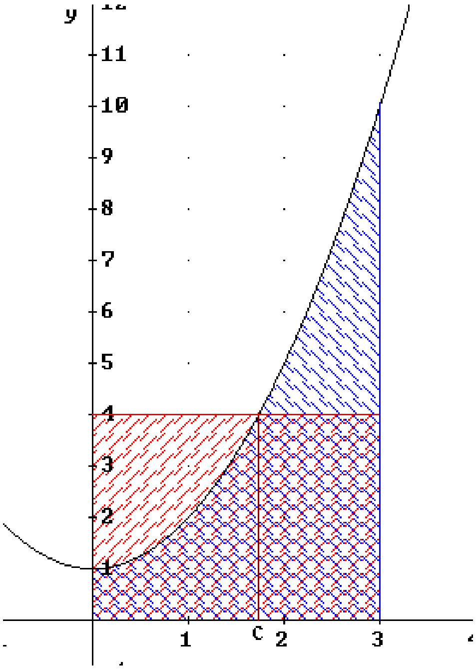
$$\frac{\int_1^3 \left(3x^2 + x\right)}{3-1} = \frac{\left|x^3 + \dfrac{x^2}{2}\right|_1^3}{2} = \frac{\left(27 + \dfrac{9}{2}\right) - \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)}{2} = 15$$

Vale il seguente importante teorema.

TEOREMA: se *f* è una funzione continua in (*a*, *b*) allora esiste almeno un punto *c* per cui $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$, cioè la funzione in *c* ha il valore coincidente con il valore medio.

ESEMPIO: considerando la funzione precedente, il punto *c* deve essere tale che $f(c) = 3c^2 + c = 15$. Risolvendo l'equazione $3c^2 + c = 15$ si trova $c = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+180}}{6} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{181}}{6}$ e solo la radice positiva è accettabile (e vale circa 2.07).

OSSERVAZIONE: il teorema del valore medio ha un immediato significato geometrico. Riscriviamo la relazione precedente in questo modo: $(b-a)f(c)=\int_a^b f(x)dx$. A destra abbiamo il valore dell'area sottesa dalla curva mentre a sinistra abbiamo un prodotto tra una "base" (la lunghezza dell'intervallo) e un'"altezza" (il valore di $f(c)$). Il teorema ci dice quindi che esiste un punto c ($a < c < b$) per cui l'area del rettangolo di base (a, b) e di altezza $f(c)$ è uguale all'area sottesa dalla curva. La due parti sopra e sotto il segmento orizzontale si compensano (si veda la figura).



È mostrata la funzione $f(x)=x^2+1$ nell'intervallo (0, 3). Il punto c corrisponde a circa 1.732.

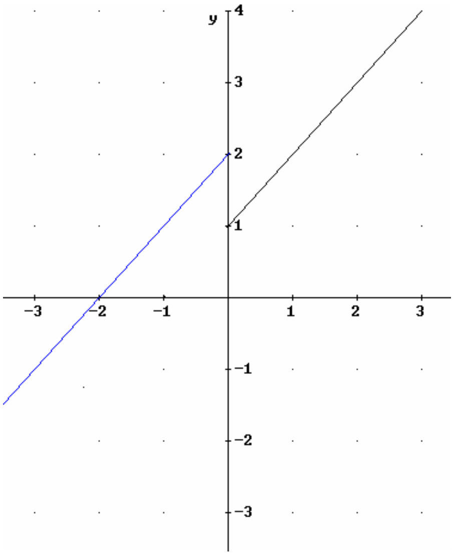
Esercizi

1. (esame febbraio 2000) Il profitto marginale di un'impresa è $p'(q) = \frac{40}{\sqrt{q}} - 2$. Determinare per quale valore della quantità della merce venduta q si ha il massimo profitto $p(q)$ e calcolare di quanto varia il profitto se q passa da 100 a 400 unità
2. Data $f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ per } x > 0 \\ x+2 \text{ per } x < 0 \end{cases}$ calcolare $\int_{-1}^{1} f(x)dx$
3. Il costo marginale di produzione di un bene è $C'(q) = \frac{3000}{6q + e^5}$. Determinare il costo totale di produzione $C(q)$ nell'ipotesi che il costo fisso sia $C(0) = 5000$; calcolare l'incremento del costo totale di produzione $C(q)$ se la produzione passa da $q_0 = e^5$ a $q_1 = 2e^5$.
4. (gennaio 2001) Il profitto marginale di un'azienda è descritto nell'intervallo di tempo [1, 2] dalla funzione $P'(t) = 100 - \frac{80}{t^2}$. Determinare la funzione di profitto tale che $P(1) = 200$; calcolare il profitto marginale medio M relativo all'intervallo I.
5. (febbraio 2001) Si consideri la funzione $f(x) = \begin{cases} 3 + x \text{ per } x < 2 \\ -2x + 5 \text{ per } x \geq 2 \end{cases}$. Calcolare $\int_{1}^{3} f(x)dx$.

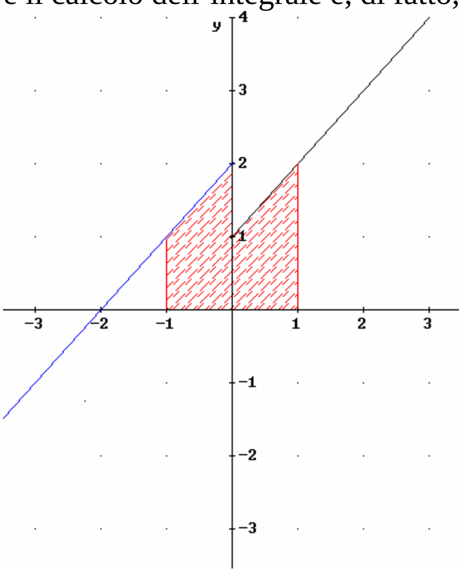
Soluzioni

1. (esame febbraio 2000) Il profitto marginale di un'impresa è $p'(q)=\dfrac{40}{\sqrt{q}}-2$. Determinare per quale valore della quantità della merce venduta q si ha il massimo profitto $p(q)$ e calcolare di quanto varia il profitto se q passa da 100 a 400 unità. Il massimo profitto dell'impresa si ha quando $p'(q)=0$ cioè se $\dfrac{40}{\sqrt{q}}-2=0$. Semplificando si ha $40=2\sqrt{q}$ cioè q = 400. Il profitto $p(q)$ non è calcolabile in assoluto (perché conosciamo solo il profitto marginale) ma sappiamo che $p(q)=\int p'(q)dq$ cioè che p è una primitiva di p', il profitto marginale. Pertanto, la variazione richiesta $p(400)-p(100)$ è uguale a
$$p(400)-p(100)=\int_{100}^{400} p'(q)dq=\left|80\sqrt{q}-2q\right|_{100}^{400}=(80\cdot 20-800)-(80\cdot 10-20)=1680$$

2. Data $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ per } x>0 \\ x+2 \text{ per } x<0 \end{cases}$ calcolare $\int_{-1}^{1} f(x)dx$. Il grafico della funzione è il seguente



e il calcolo dell'integrale è, di fatto, il calcolo dell'area tratteggiata nella figura seguente



Al calcolo effettivo del valore si può arrivare in due modi. Rapidamente, si osserva che si tratta di due trapezi uguali. Le basi sono lunghe 1 e 2 e l'altezza è 1. Quindi l'area di un trapezio è 3/2

e l'integrale vale 3.
Oppure si ricorre al calcolo integrale. In questo caso bisogna spezzare in due l'integrale e calcolare prima $\int_{-1}^{0}(x+2)dx$ e poi $\int_{0}^{1}(x+1)dx$. Si ha

$\int_{-1}^{0}(x+2)dx = \left|\frac{x^2}{2}+2x\right|_{-1}^{0} = (0+0)-\left(\frac{1}{2}-2\right)=\frac{3}{2}$ e analogamente per l'altro integrale da cui si ricava di nuovo il risultato 3.

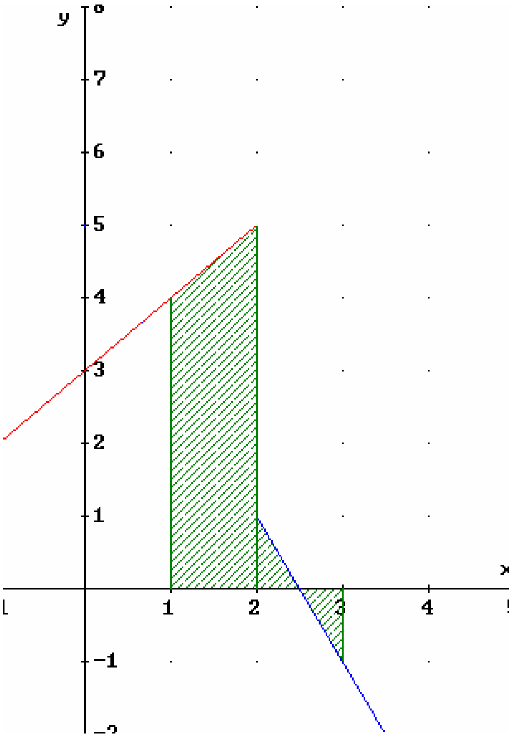
3. Il costo marginale di produzione di un bene è $C'(q)=\frac{3000}{6q+e^5}$. Determinare il costo totale di produzione $C(q)$ nell'ipotesi che il costo fisso sia $C(0) = 5000$; calcolare l'incremento del costo totale di produzione $C(q)$ se la produzione passa da $q_0 = e^5$ a $q_1 = 2e^5$. Conoscendo il costo marginale, il costo totale di produzione è dato dall'integrale indefinito del costo marginale $C(q)=\int C'(q)dq=\int \frac{3000}{6q+e^5}dq = 500\ln\left(6q+e^5\right)+c$ che verifica la condizione $C(0) = 5000$, cioè $500\ln\left(e^5\right)+c=5000$ da cui $c = 2500$. L'incremento del costo è dato da $\int_{e^5}^{2e^5} C'(q)dq = \left|500\ln\left(6q+e^5\right)\right|_{e^5}^{2e^5} = 500\ln\left(13e^5\right)-500\ln\left(7e^5\right)=500\ln\left(\frac{13}{7}\right)$.

4. Il profitto marginale di un'azienda è descritto nell'intervallo di tempo [1, 2] dalla funzione $P'(t)=100-\frac{80}{t^2}$. Determinare la funzione di profitto tale che $P(1) = 200$; calcolare il profitto marginale medio M relativo all'intervallo I. Il profitto è dato dalla primitiva del profitto marginale per cui $P(1) = 200$. Calcoliamo l'integrale indefinito:
$P(t)=\int\left(100-\frac{80}{t^2}\right)dt = 100t+\frac{80}{t}+c$. La condizione iniziale richiede che
$P(1)=100+80+c=200$ da cui $c = 20$. Quindi la funzione profitto è $P(t)=100t+\frac{80}{t}+20$. Il profitto marginale medio nell'intervallo è il valore medio di $P'(t)$ nell'intervallo [1, 2], cioè
$\frac{1}{2-1}\int_1^2 P'(t) = P(2)-P(1)=260-200=60$

5. (febbraio 2001) Si consideri la funzione $f(x)=\begin{cases} 3+x \text{ per } x<2 \\ -2x+5 \text{ per } x\geq 2\end{cases}$. Calcolare $\int_1^3 f(x)dx$. Si può ragionare analiticamente, calcolando l'integrale proposto come somma di due integrali:

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2(3+x)dx+\int_2^3(-2x+5)dx = \left|3x+\frac{x^2}{2}\right|_1^2 + \left|-x^2+5x\right|_2^3 =$$

$= (6+2)-\left(3+\frac{1}{2}\right)+(-9+15)-(-4+10)=8-\frac{7}{2}+6-6=\frac{9}{2}$ oppure graficamente:



L'integrale definito è uguale alla superficie (con segno) tratteggiata. Semplici considerazioni geometriche portano al risultato 9/2

Lezione 61-62

Integrali generalizzati (o impropri)

La teoria dell'integrazione è stata sviluppata per intervalli finiti e, in pratica, per funzioni continue. In alcuni casi, però, sorge la necessità di calcolare

- integrali definiti di funzioni continue su intervalli infiniti oppure
- integrali definiti di funzioni illimitate su intervalli finiti;

Ad esempio, si vogliono calcolare i seguenti integrali $\int_1^{+\infty} \frac{3}{1+x^2}dx$ o $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$. Un esempio classico è fornito dalla teoria del calcolo delle probabilità.

ESEMPIO: sotto determinate semplici ipotesi, alcune grandezze aleatorie (cioè non definibili in modo deterministico) sono rappresentate da funzioni del tipo $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ dove σ e μ sono parametri che caratterizzano la grandezza (scarto quadratico medio e media della popolazione) e π ha l'usuale significato. La funzione *f* ha la caratteristica di rappresentare la probabilità di un certo evento nel senso che segue: il valore di $\int_a^b f(x)dx$ è la probabilità che la grandezza assuma un valore compreso tra *a* e *b*. Se adesso si vuole calcolare la probabilità che tale grandezza superi un certo valore *a*, l'integrale da calcolare dovrebbe essere $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Integrali dei tipi che abbiamo appena citato *non* sono ancora stati definiti e quindi sono simboli privi di significato. Ad essi si possono dare molteplici significati ma quello più comune è il seguente.

DEFINIZIONE: data una funzione *f* si definisce $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ il valore, se esiste, del limite $\lim_{k\to+\infty}\int_a^k f(x)dx$. In tal caso si dirà che "l'integrale converge al valore …"; altrimenti l'integrale si dirà divergente. Analogamente, il valore di $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ è definito da $\lim_{k\to-\infty}\int_k^a f(x)dx$. Gli integrali calcolati in questo modo si dicono "integrali generalizzati" o impropri.

OSSERVAZIONE: si tratta quindi di calcolare l'integrale su un intervallo finito (*a*, *k*), scrivere il risultato in funzione di *k* e infine di far tendere *k* all'infinito.

ESEMPI:

- calcolare l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$. Dobbiamo in realtà calcolare $\lim_{k\to+\infty}\int_0^k e^{-x}dx$. Calcoliamo prima $\int_0^k e^{-x}dx = \left|-e^{-x}\right|_0^k = -e^{-k}+1$. Poiché $\lim_{k\to+\infty}\left(1-e^{-k}\right)=1$, l'integrale proposto è convergente e vale 1.

- calcolare l'integrale $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2} dx$. Calcoliamo prima $\int_{k}^{-2} \frac{1}{x^2} dx = \left| -\frac{1}{x} \right|_{k}^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$. L'integrale proposto è convergente e vale $\lim_{k \to -\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2}$
- calcolare $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$. Calcoliamo prima $\int_{1}^{k} \frac{1}{x} dx = \left| \ln x \right|_{1}^{k} = \ln k - \ln 1 = \ln k$. Poiché $\lim_{k \to +\infty} \ln k = +\infty$ l'integrale proposto è divergente.

OSSERVAZIONE: perché gli integrali generalizzati del tipo sopra definito convergano è necessario che le funzioni integrande tendano a zero al tendere di uno dei due estremi all'infinito. Questo perché altrimenti le aree risulterebbero necessariamente infinite. Tuttavia, analogamente a quanto succede per le serie, la condizione che l'integrando sia infinitesimo non è sufficiente perché l'integrale converga.

ESEMPIO: si voglia calcolare $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$. Calcoliamo $\int_{1}^{k} \frac{1}{x^p} dx = \left| \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_{1}^{k} = \frac{k^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} = \frac{k^{-p+1} - 1}{-p+1}$. Se ora cerchiamo il limite di questa espressione per $k \to \infty$ dobbiamo distinguere due casi:

- se $-p+1 > 0$, cioè $p < 1$, allora $\lim_{k \to +\infty} \frac{k^{-p+1} - 1}{-p+1} = +\infty$ perché il termine con k diverge.
- se $-p+1 = 0$, cioè $p = 1$, allora si ha l'integrale di $1/x$ che diverge (è stato calcolato in uno dei precedenti esempi)
- se $-p+1 < 0$, cioè $p > 1$, allora $\lim_{k \to +\infty} \frac{k^{-p+1} - 1}{-p+1} = \frac{-1}{-p+1} = \frac{1}{1-p}$ perché il termine con k tende a zero.

Riassumendo:

TEOREMA: l'integrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge se e solo se $p > 1$.

OSSERVAZIONE: Come si può notare, questo risultato è analogo a quello ottenuto per le serie, ove si era detto che una serie del tipo $\sum \frac{1}{n^p}$ converge se e solo se $p > 1$. Il legame tra i due argomenti è infatti molto profondo.

Il teorema precedente permette di calcolare rapidamente alcuni risultati. Per gli integrali generalizzati vale infatti un risultato equivalente al criterio del confronto asintotico per le serie.

TEOREMA: siano f e g positive e integrabili in ogni intervallo della forma (a, k) e sia $f(x) \sim g(x)$ per x tendente all'infinito. Allora f è integrabile in $(a, +\infty)$ se e solo g è integrabile in $(a, +\infty)$.

OSSERVAZIONE: i due teoremi precedenti suggeriscono un metodo pratico per determinare se un dato integrale è convergente o meno: studiare il suo comportamento asintotico e confrontarlo con quello di funzioni conosciute (tipicamente della forma $\frac{1}{x^p}$).

ESEMPI:

- (gennaio 1999) calcolare una primitiva di $\frac{3}{x(x+3)}$ e il valore di $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x(x+3)} dx$. La primitiva della funzione proposta si trova usando il metodo di scomposizione in frazioni. Posto $\frac{3}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}$ si ricava $\frac{A(x+3)+Bx}{x(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A}{x(x+3)}$ da cui $A + B = 0$ e $3A = 3$, cioè $A = 1$ e $B = -1$. Quindi $\int \frac{3}{x(x+3)} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+3} dx = \ln x - \ln(x+3) + c = \ln \frac{x}{x+3} + c$.
  Per calcolare il valore dell'integrale generalizzato calcoliamo prima $\int_1^k \frac{3}{x(x+3)} dx = \left| \ln \frac{x}{x+3} \right|_1^k = \ln \frac{k}{k+3} - \ln \frac{1}{4}$. Facendo tendere k a + ∞ il valore tende a – ln 1/4.
- (marzo 1999) sia $f(x) = \frac{x^a}{(x+3)^2}$ con a parametro reale. Si dica per quali valori di a esiste finito l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ e si calcoli il valore di tale integrale per $a = 0$. Al tendere di x all'infinito sia ha $f(x) \sim x^{a-2}$. Per i teoremi precedenti la funzione sarà integrabile solo se $a - 2 < -1$ cioè $a < 1$. La funzione è quindi integrabile per $a = 0$. In questo caso la funzione da integrare è $\frac{1}{(x+3)^2}$; una primitiva di $\frac{1}{(x+3)^2}$ è $-\frac{1}{x+3}$ e quindi $\int_1^k \frac{1}{(x+3)^2} = \left| -\frac{1}{x+3} \right|_1^k = -\frac{1}{k+3} + \frac{1}{4}$.
  Calcoliamo infine $\lim_{k \to +\infty} \left(-\frac{1}{k+3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$ che è il valore dell'integrale cercato.
- (gennaio 2000) Trovare una primitiva di $f(x) = e^{-2x}$ e di $g(x) = \frac{1}{x^a}$ con $a > 1$. Dire per quale valore di a si ha $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} g(x)dx$. Le primitive si trovano facilmente: $\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + c$ e $\int \frac{1}{x^a} dx = \frac{x^{-a+1}}{-a+1} + c$. Il valore del primo integrale generalizzato è
  $\lim_{k \to +\infty} \int_1^k e^{-2x} dx = \lim_{k \to +\infty} \left| -\frac{1}{2} e^{-2x} \right|_1^k = \lim_{k \to +\infty} \left(-\frac{1}{2} \left(e^{-2k} - e^{-2} \right) \right) = -\frac{1}{2} e^{-2}$. Quello del secondo è
  $\lim_{k \to +\infty} \int_1^k \frac{1}{x^a} dx = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{x^{-a+1}}{-a+1} \right|_1^k = \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{k^{-a+1} - 1}{-a+1} \right) = -\frac{1}{-a+1}$. Perché i due integrali generalizzati siano uguali deve essere $-\frac{1}{2} e^{-2} = \frac{1}{-a+1}$ cioè $-a+1 = -2e^2$ da cui $a = 1 + 2e^2$.

Esercizi

1. Sia f una funzione continua su tutto l'insieme dei numeri reali. Allora *necessariamente*, l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge se per x tendente all'infinito:
   a) $f(x) \to 0$
   b) $f(x) \to 3$
   c) $f(x)$ è derivabile
   d) nessuna delle altre tre
2. Calcolare i seguenti integrali generalizzati:
   a) $\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$
   b) $\int_0^{-\infty} xe^x dx$
   c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx$

Soluzioni

1. Sia *f* una funzione continua su tutto l'insieme dei numeri reali. Allora *necessariamente,* l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge se per *x* tendente all'infinito:
   a) $f(x) \to 0$
   b) $f(x) \to 3$ GIUSTA
   c) $f(x)$ è derivabile
   d) nessuna delle altre tre

   La condizione che l'integrando sia infinitesimo è solo necessaria e non sufficiente: quindi la risposta a) non è quella corretta. La derivabilità non ha alcun legame con l'integrabilità della funzione. Invece, la condizione che la funzione abbia un asintoto orizzontale implica necessariamente che il suo integrale sia divergente.
2. Calcolare i seguenti integrali generalizzati:
   a) $\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$. Una primitiva si calcola per sostituzione ($e^x = t$ da cui $e^x dx = dt$):
   $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx = \int \frac{1}{t^2-1}dt = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$. Pertanto,
   $\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx = \frac{1}{2}\left|\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\right|_1^k = \frac{1}{2}\ln\frac{e^k-1}{e^k+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{e-1}{e+1}$ e, poiché per *k* tendente all'infinito si ha $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\frac{e^k-1}{e^k+1} = 0$, il valore dell'integrale proposto è $-\frac{1}{2}\ln\frac{e-1}{e+1}$
   b) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$. Una primitiva si calcola per parti (è già stata calcolata nella lezione 54) e si ha $\int xe^x dx = xe^x - e^x$. L'integrale generalizzato si calcola come segue.
   $\int_k^0 xe^x dx = \left|xe^x - e^x\right|_k^0 = (0-1) - \left(ke^k - e^k\right) = -1 - ke^k + e^k$ e $\lim_{k\to-\infty}\left(-1 - ke^k + e^k\right) = -1$.
   c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx$. Una primitiva si calcola con il metodo di scomposizione. Dall'uguaglianza
   $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$ si ricava *A* = 1 e *B* = –1 e quindi
   $\int \frac{1}{x(x+1)}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+1}dx = \ln\frac{x}{x+1} + c$. Allora
   $\int_1^k \frac{1}{x(x+1)}dx = \left|\ln\frac{x}{x+1}\right|_1^k = \ln\frac{k}{k+1} - \ln\frac{1}{2}$ e l'integrale proposto è uguale a
   $\lim_{k\to+\infty}\left(\ln\frac{k}{k+1} - \ln\frac{1}{2}\right) = -\ln\frac{1}{2}$

Lezione 63-64

Funzioni definite da integrali

Uno dei quesiti principali del calcolo degli integrali è: quali funzioni ammettono primitiva? La risposta a questa domanda non è semplice e coinvolge l'uso di funzioni definite mediante integrali.

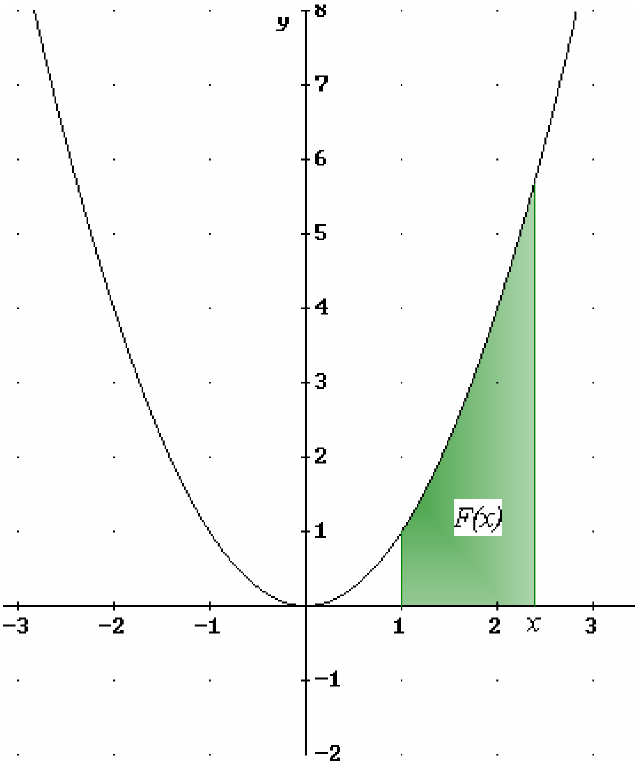
Sia data una funzione *f* e supponiamo che essa sia integrabile in un intervallo [*a*, *b*]. Fissato un punto *c* interno all'intervallo possiamo calcolare, per ogni *x* interno all'intervallo il valore di $\int_c^x f(t)dt$ che ovviamente varierà al variare di *x*.

DEFINIZIONE: la funzione *F*(*x*) così costruita si chiama *funzione integrale*, in simboli $F(x) = \int_c^x f(t)dt$.

OSSERVAZIONE: la variabile di integrazione è stata cambiata in *t* perché non si confonda con *x* che è la variabile indipendente.

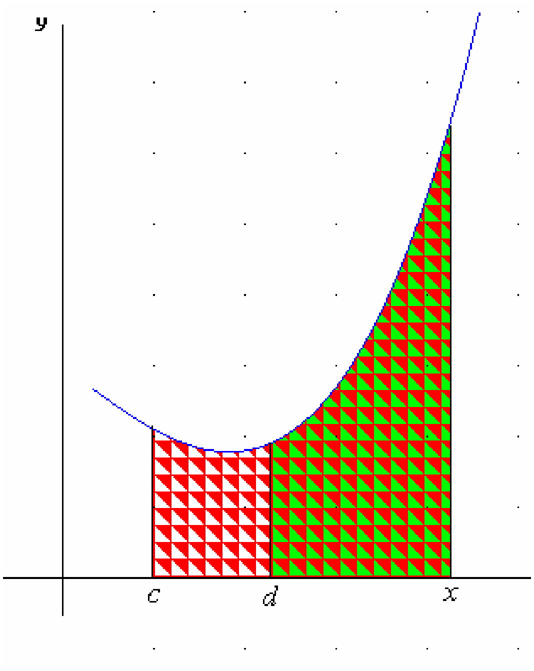
ESEMPIO: data la funzione $f(x) = x^2$ la funzione integrale costruita a partire da essa e avente come estremo 1 è $F(x) = \int_1^x t^2 dt$. Quindi, per esempio, $F(3) = \int_1^3 t^2 dt = \left|\frac{t^3}{3}\right|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$.

OSSERVAZIONE: la funzione integrale ha una immediata interpretazione geometrica. Il valore di *F*(*x*) non è altro che l'integrale definito di *f* tra il punto iniziale e *x*. Si osservi la figura seguente.



OSSERVAZIONE: per come è stata definita la funzione integrale, se *c* è il punto iniziale allora vale la proprietà $F(c)=0$.

OSSERVAZIONE: se al posto di *c* viene scelto un altro punto iniziale *d* la funzione cambia ma solo di un addendo costante che è rappresentato da $\int_c^d f(t)dt$. Questo si può verificare in due modi. Analiticamente, chiamiamo $F_c(x)=\int_c^x f(t)dt$ la funzione con punto iniziale *c* e $F_d(x)=\int_d^x f(t)dt$ quella con punto iniziale *d*. Allora basta osservare che, per le proprietà dell'integrale definito, $F_c(x)=\int_c^x f(t)dt=\int_c^d f(t)dt+\int_d^x f(t)dt=\int_c^d f(t)dt+F_d(x)$.
Per una giustificazione geometrica, si osservi la figura seguente.



in cui col tratteggio rosso è indicata la funzione $F_c(x)=\int_c^x f(t)dt$ e con quello verde $F_d(x)=\int_d^x f(t)dt$.

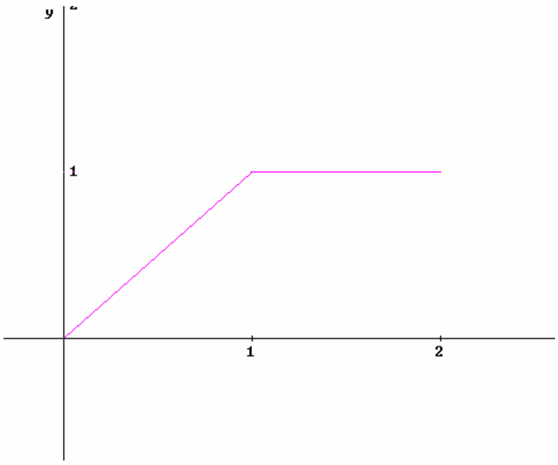
In alcuni casi, il calcolo delle funzioni integrali è molto semplificato dal fatto che gli integrali indicati si possono effettivamente calcolare. Nell'esempio precedente, $F(x)=\int_1^x t^2dt=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}$. Tuttavia, in molti casi questo non è possibile.

I legami tra derivate e integrali, come abbiamo visto in numerose occasioni sono profondi. Un altro importante risultato è riassunto nel seguente teorema.

TEOREMA (secondo teorema fondamentale del calcolo integrale): se *f* è una funzione continua definita sull'intervallo [*a*, *b*], allora la funzione integrale $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ è differenziabile e la sua derivata prima $F'(x)$ è uguale a *f*(*x*), cioè $F'(x)=f(x)$.

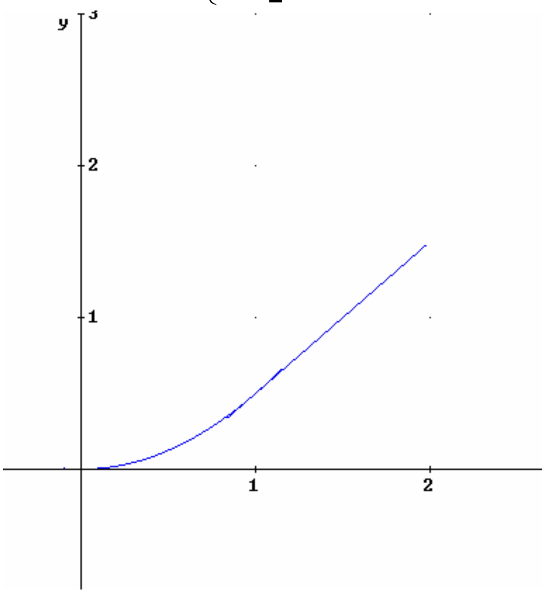
ESEMPIO: per la funzione precedente $F(x)=\int_1^x t^2 dt$, essendo la funzione t^2 continua, senza bisogno di fare altri conti siamo in grado di dire che $F(x) = x^2$.

ESEMPIO: è data la funzione $f(x)=\begin{cases} x \text{ per } 0 \le x \le 1 \\ 1 \text{ per } 1 < x \le 2 \end{cases}$. Tracciare il grafico di $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ e darne un'espressione analitica.
Iniziamo col tracciare il grafico di *f*.



Il grafico di *F* si può tracciare riflettendo su come essa è definita. Si tratta, innanzi tutto, di una funzione crescente il cui valore in 0 è 0. La funzione deve valere 1/2 per x = 1 (questo è infatti il valore di $\int_0^1 f(t)dt$) e 3/2 per x = 2. Per conoscere altre informazioni, occorre studiare l'espressione analitica di *F*. Per fare questo dividiamo l'intervallo [0, 2] nei due intervalli [0, 1] e [1, 2]. Per $x \in [0,1]$ si ha $F(x)=\int_0^x tdt = \frac{x^2}{2}$ mentre per $x \in [1,2]$ si ha $F(x)=\frac{1}{2}+\int_1^x dt = \frac{1}{2}+x-1$.

L'espressione analitica di *F* è quindi $F(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2} \text{ per } 0 \le x \le 1 \\ x-\frac{1}{2} \text{ per } 1 \le x \le 2 \end{cases}$ e il suo grafico è il seguente.



OSSERVAZIONI:

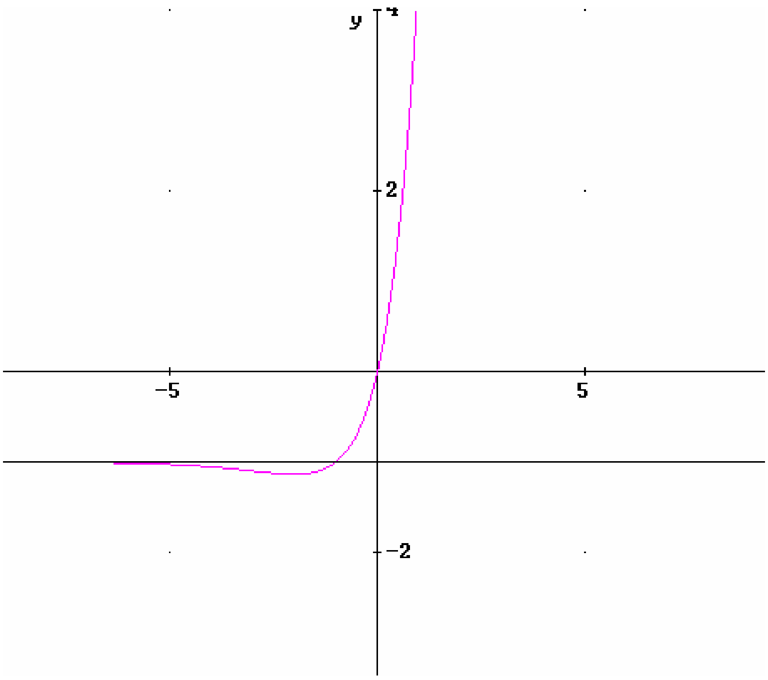
- il grafico di F è formato da un tratto di parabola e da un segmento di retta.
- nel punto $x = 1$, la funzione f presenta un punto angoloso. Essa è continua ma la sua derivata non esiste; la funzione integrale F, invece, è continua e anche derivabile (il suo profilo è liscio). Questo è vero in genere di tutte le funzioni integrali: esse hanno "più" regolarità delle funzioni integrande
- se avessimo scelto un diverso punto iniziale, anziché $x = 0$, il grafico sarebbe stato lo stesso ma traslato verso l'alto o verso il basso di una certa quantità.

Esercizi

1. (gennaio 1999) data la funzione $f(t) = (t+2)e^t$ si calcoli la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ e si tracci un grafico qualitativo di $F(x)$.
2. (settembre 1999) date le funzioni $f(t) = \dfrac{2^{-t}}{t^2+3}$ e $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, verificare che F è strettamente crescente nel suo dominio e determinare se esiste finito il limite $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
3. (gennaio 2001) data la funzione $f(x) = 6x^2 - x^3$ tracciare un grafico qualitativo della funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ nell'intervallo [0. 8].
4. (luglio 2000) si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_0^x (t^2 - 5t)dt$ nell'intervallo [0, 10]: determinare in tale intervallo il crescere e il decrescere di f e determinare $F(10)$.

Soluzioni

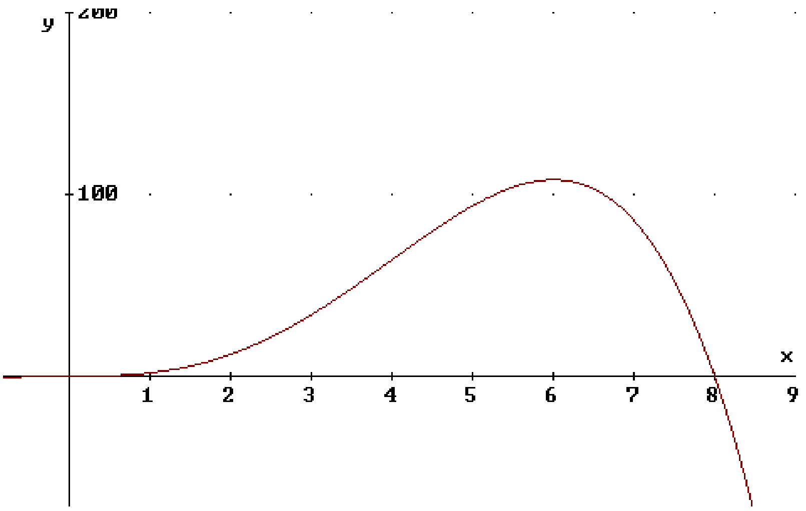
1. (gennaio 1999) data la funzione $f(t)=(t+2)e^t$ si calcoli la funzione integrale $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ e si tracci un grafico qualitativo di $F(x)$. La funzione integrale è $F(x)=\int_0^x (t+2)e^t dt$. Una primitiva di f si trova per parti. Considerando $u = t + 2$ (fattore intero) e $\frac{dv}{dt}=e^t$ (fattore differenziale) si ha $\int (t+2)e^t dt=(t+2)e^t-\int e^t dt=(t+2)e^t-e^t+c=(t+1)e^t+c$. Quindi $F(x)=(x+1)e^x-1$. Per tracciare un grafico qualitativo, notiamo innanzi tutto che conosciamo subito la derivata prima di F: $F'(x)=f(x)=(x+2)e^x$ e quindi sappiamo che la derivata si annulla in un solo punto ($x = -2$) e che è negativa prima di –2 e positiva dopo. Quindi il punto di ascissa –2 è un punto di minimo. Il punto è $(-2,\ -e^{-2}-1)$.
La funzione vale 0 nel punto di ascissa $x = 0$.
Visto che abbiamo l'espressione esplicita di $F(x)$ possiamo calcolare $\lim_{x\to-\infty}F(x)=-1$ mentre per x che tende a $+\infty$ la funzione diverge. Il grafico di $F(x)$ è il seguente.



2. (settembre 1999) date le funzioni $f(t)=\frac{2^{-t}}{t^2+3}$ e $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, verificare che F è strettamente crescente nel suo dominio e determinare se esiste finito il limite $\lim_{x\to+\infty}F(x)$. Non siamo in grado di dare un'espressione esplicita per $F(x)$ perché non conosciamo come svolgere l'integrale. Tuttavia, poiché F è una funzione integrale di una funzione continua, sappiamo che $F'(x)=f(x)$ cioè che $F'(x)=\frac{2^{-x}}{x^2+3}$. Poiché questa espressione è sempre positiva per qualunque valore di x, la funzione F è strettamente crescente (ovviamente nel suo dominio). Per determinare il limite dobbiamo vedere se esiste l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty}\frac{2^{-t}}{t^2+3}dt$. Ma

questo integrale converge perché la funzione $\frac{2^{-t}}{t^2+3}$ è definitivamente inferiore a $\frac{1}{t^2}$ che, a sua volta, è convergente.

3. (gennaio 2001) data la funzione $f(x)=6x^2-x^3$ tracciare un grafico qualitativo della funzione $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ nell'intervallo [0. 8]. La funzione integrale si può scrivere esplicitamente: $F(x)=\int_0^x (6t^2-t^3)dt=\left|2t^3-\frac{t^4}{4}\right|_0^x=2x^3-\frac{x^4}{4}$. Anche senza svolgere questi conti siamo tuttavia siamo in grado di dire che poiché *f* si annulla per $x = 6$, e $F'(x)=f(x)$, in tale punto la funzione *F* ha un estremo. Poiché *f* è negativa per $x > 6$ e positiva per $x < 6$, nel punto di ascissa $x = 6$ (e ordinata 108) si ha un massimo. Sostituendo ad *x* i valori 0 e 8 si vede che la funzione passa per i punti (0, 0) e (8, 0). La derivata seconda di *F* è uguale alla derivata prima di *f*: $f'=12x-3x^2$ che si annulla in $x = 0$ e in $x = 4$. La funzione ha quindi un flesso in $x = 4$. Il grafico della funzione è il seguente.



4. (luglio 2000) si consideri la funzione integrale $F(x)=\int_0^x (t^2-5t)dt$ nell'intervallo [0, 10]: determinare in tale intervallo il crescere e il decrescere di *f* e determinare *F*(10). Anche se la *F* si può scrivere esplicitamente, possiamo rispondere alla prima domanda osservando che $F'(x)=f(x)=x^2-5x$ e che quindi la *F* ha derivata nulla per $x = 0$ e per $x = 5$ ed è positiva per $x < 0$ (fuori dall'intervallo indicato) e per $x > 5$. Quindi la funzione è decrescente per $x < 5$, ha un minimo in $x = 5$ e cresce per $x > 5$ (fino a $x = 10$).
Per calcolare il valore di *F*(10) è necessario svolgere l'integrale:
$$F(10)=\int_0^{10}(t^2-5t)dt=\left|\frac{t^3}{3}-5\frac{t^2}{2}\right|_0^{10}=\left(\frac{1000}{3}-5\frac{100}{2}\right)-(0)=\frac{250}{3}$$